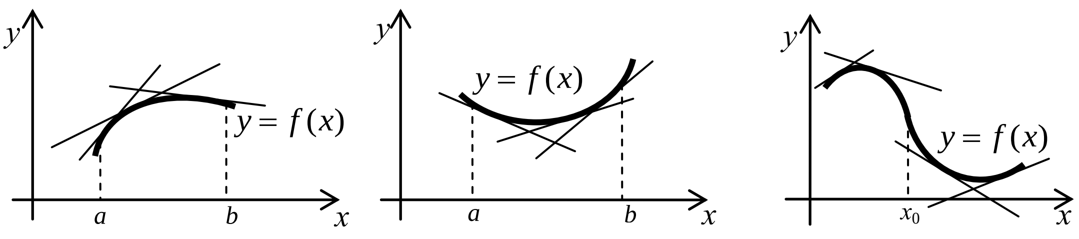
Н. А. Григорьева
А. М. Матвеева

Курс лекций по математическому анализу

для студентов, обучающихся по направлению подготовки 262000 Технология изделий лёгкой промышленности

ЧАСТЬ 1



ЧЕБОКСАРЫ
2013

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Н. А. Григорьева
А. М. Матвеева

Курс лекций по математическому анализу

для студентов, обучающихся по направлению подготовки 262000 Технология изделий лёгкой промышленности

ЧАСТЬ 1

ЧЕБОКСАРЫ
2013

УДК 517 (075.8)
ББК 22.16я73
Г 834

Григорьева, Н. А. Курс лекций по математическому анализу для студентов, обучающихся по направлению подготовки 262000 Технология изделий лёгкой промышленности : в 2 ч. Ч. 1 / Н. А. Григорьева, А. М. Матвеева. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. – 82 с.

Печатается по решению учёного совета ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева» (протокол № 3 от 31.10.2013 г.).

Рецензенты:

П. А. Фисунов – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «Чувашская государственная сельскохозяйственная академия»;

С. В. Тихонов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»;

Т. Н. Глухова – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева».

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов первого курса технолого-экономического факультета, обучающихся по направлению подготовки 262000 «Технология изделий лёгкой промышленности», профиль подготовки «Технология швейных изделий», а также для преподавателей высших учебных заведений, которые ведут курс «Математика».

Содержание пособия соответствует требованиям государственного образовательного стандарта и программе дисциплины «Математика».

Учебное пособие состоит из 13 параграфов; в него включены лекции по следующим разделам математического анализа: множества, функции, пределы, непрерывность, дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных.

Изложение теоретического материала по всем темам сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач, для которых приведено подробное решение.

Пособие может быть использовано студентами также для самостоятельного изучения соответствующего материала, является базой для подготовки к экзамену по математике на первом курсе.

§ 1. Множества

1. Понятие множества.
2. Операции над множествами, их свойства.
3. Численность множества.
4. Понятие меры множества.

1. Понятие множества

В повседневной жизни различные совокупности предметов называют одним словом: совокупность документов – архивом, собрание книг – библиотекой и т. д.

Математическим понятием, отражающим объединение некоторых объектов, предметов или понятий в единую совокупность, является понятие *множества*. Понятие множества, как и другие основополагающие понятия математики, вводится без определения.

Определение. Предметы, объекты, из которых состоит данное множество, называются его *элементами.*

Множества обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots$

Элементы множества обозначаются малыми буквами латинского алфавита: $a, b, c, \ldots$

Запись: $a \in B$ – элемент a принадлежит множеству B,

$x \notin C$ – элемент x не принадлежит множеству C.

Определение. *Конечными* называются множества, состоящие из конечного числа элементов.

ПРИМЕР. Множество студентов в аудитории – конечное множество.

Определение. Множества, не являющиеся конечными, называются *бесконечными*.

ПРИМЕР. Множество звёзд на небе – бесконечное множество.

Определение. Множества, не имеющие ни одного элемента, называются *пустыми*, обозначаются символом $\varnothing$.

Способы задания множеств:

1) Перечисляются все элементы множества, при этом элементы множества записываются в фигурных скобках: $A = \{1;2;3\}$ Этот способ применяется только для конечных множеств.

2) Указывается характеристическое свойство множества – свойство, которым обладают все элементы данного множества. Например, $A = \{x \mid x^2 + 2x + 1 = 0\}$ – множество A состоит из тех

элементов, которые являются корнями указанного квадратного уравнения. Этот способ задания применим и к конечным, и к бесконечным множествам.

Определение. Множества A и B называются *равными*, если они содержат одни и те же элементы.

ПРИМЕР. Множества $A=\{1;2;3\}$ и $B=\{3;1;2\}$ равны, так как содержат одинаковые элементы: $A=B$.

Определение. Говорят, что множество B является *подмножеством* множества A, если каждый элемент из множества B является элементом и множества A: $B\subset A$.

ПРИМЕРЫ.

1) Пусть A – множество канцелярских товаров в аудитории, B – множество шариковых ручек в аудитории, тогда $B\subset A$.

2) Перечислим все подмножества множества $A=\{1;2;3\}$:
$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{2;3\}$, $\{1;2;3\}$, $\varnothing$.

Замечания.

1) Если $A=B$, то $B\subset A$, $A\subset B$.

2) Пустое множество является подмножеством любого множества: $\varnothing\subset A$.

3) Знак $\subset$ можно ставить только между множествами: $B\subset A$, $\varnothing\subset A$.

4) Знак $\in$ можно ставить только между элементом множества и самим множеством: $a\in\{a;b;c\}$.

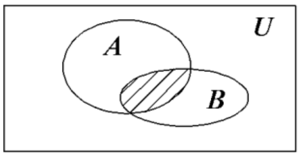
2. Операции над множествами, их свойства

Пусть все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого фиксированного множества, которое назовём *универсальным* и обозначим буквой U. Для геометрической иллюстрации операций над множествами воспользуемся *диаграммами Эйлера – Венна*, на которых универсальное множество изображают в виде прямоугольника, а остальные множества – в виде овалов, в частности кругов.

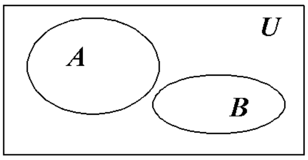
Операции над множествами:

1) *Пересечение множеств A и B* – это множество $A\cap B$ элементов, принадлежащих одновременно **и** множеству A, **и** множеству B:

$$A\cap B=\{x\in A \quad и \quad x\in B\}.$$



$A \cap B$



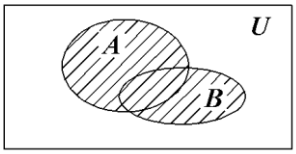
$A \cap B = \varnothing.$

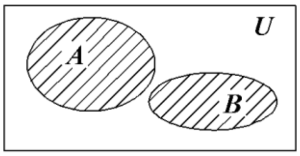
ПРИМЕРЫ. 1) $A = \{1;3;5;6\}$, $B = \{2;4;6\} \Rightarrow A \cap B = \{6\}$;

2) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

2) *Объединение множеств A и B* – это множество $A \cup B$ элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств *A* **или** *B*:

$$A \cup B = \{x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\}.$$



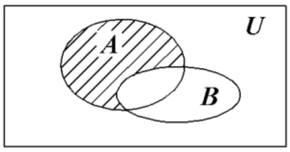


ПРИМЕРЫ. 1) $A = \{1;3;5;6\}$, $B = \{2;4;6\} \Rightarrow A \cup B = \{1;2;3;4;5;6\}$;

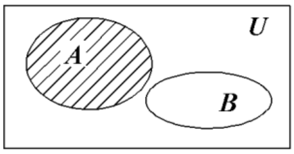
2) $A \cup \varnothing = A$.

3) *Разность двух множеств A и B* – это множество $A \setminus B$ элементов множества *A*, не принадлежащих множеству *B*:

$$A \setminus B = \{x \in A \quad \text{и} \quad x \notin B\}.$$



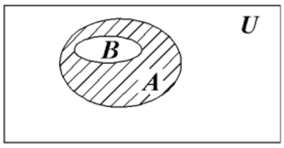
$A \setminus B$



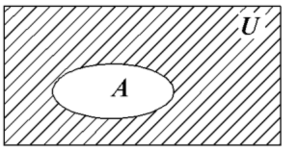
$A \setminus B = A$

ПРИМЕР. $A = \{1;3;5;6\}, B = \{2;4;6\} \Rightarrow A \setminus B = \{1;3;5\}, B \setminus A = \{2;4\}$.

4) Определение. Если множество *B* является подмножеством множества *A*, то разность $A \setminus B$ называют *дополнением множества B до множества A* и обозначают $C_A B$.



$C_A B$



$C_U A$

ПРИМЕР. $A = \{1;3;5;6\}$, $B = \{3;6\} \Rightarrow C_A B = \{1;5\}$.

В случае числовых множеств запись $C_R A$ означает дополнение множества *A* до множества *R* действительных чисел (или всей числовой прямой).

ПРИМЕР. Даны числовые множества $A=(-2;4]$, $B=[0;7)$. Найти $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $C_R A$, $C_R B$.

$A\cap B$=(–2;7), $A\cup B$=[0;4],

$A\setminus B$=(–2;0), $B\setminus A$=(4;7),

$C_R A$=(–∞;–2]$\cup$(4;+ ∞), $C_R B$=(–∞;0)$\cup$[7;+ ∞).

5) *Декартовое произведение множеств* $A_1, A_2, ..., A_k$ – это множество $A_1\times A_2\times...\times A_k$, состоящее из всех упорядоченных наборов (кортежей) вида $(a_1, a_2, ..., a_k)$, где $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2, ..., a_k\in A_k$.

ПРИМЕР. Для множеств $A=\{1;2;3\}$; $B=\{x;y\}$ имеем

$A\times B=\{(1;x),(1;y),(2;x),(2;y),(3;x),(3;y)\}$,

$B\times A=\{(x;1),(y;1),(x;2),(y;2),(x;3),(y;3)\}$.

Видим, что в общем случае $A\times B\neq B\times A$.

Замечания.

1) Если одно из множеств пусто, то и их декартово произведение считается пустым.

2) Множество координат точек координатной плоскости является декартовым произведением $R\times R$, где R – множество действительных чисел – координаты точек по оси Ox, Oy соответственно.

3. Численность множества

Определение. *Численностью* конечного множества A называется число $n(A)$ элементов множества A.

Пусть A, B – конечные множества, тогда справедливо:

1) если множества A и B не пересекаются, то

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B),$$

$$n(A\setminus B)=n(A);$$

2) если множества A и B пересекаются, то

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B),$$

$$n(A\setminus B)=n(A)-n(A\cap B);$$

3) если $B\subset A$, то $n(A\setminus B)=n(A)-n(B)$.

Замечание. Для конечных пересекающихся множеств A, B, C имеем

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-$$

$$-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C).$$

ПРИМЕР. Применим теорию множеств для решения задачи.

В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 – французский язык, 23 – оба языка. Сколько туристов не знают ни английского, ни французского языка?

Решение.

Введём обозначения:

U – множество всех туристов;

A – множество туристов, знающих английский язык;

B – множество туристов, знающих французский язык.

Тогда $A \cup B$ – множество туристов, знающих хотя бы один язык (английский или французский),

$A \cap B$ – множество туристов, знающих оба языка (и английский, и французский).

Причём имеем $n(U) = 100$, $n(A) = 70$, $n(B) = 45$, $n(A \cap B) = 23$. Таким образом, $U \setminus (A \cup B)$ – множество туристов, не знающих ни английского, ни французского языка.

Так как $(A \cup B) \subset U$, то $n(U \setminus (A \cup B)) = n(U) - n(A \cup B)$.

Множества A и B пересекаются, следовательно, имеем

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 45 - 23 = 92$.

Тогда получим $n(U \setminus (A \cup B)) = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 92 = 8$.

Таким образом, 8 туристов не знают ни английского, ни французского языка.

4. Понятие меры множества

Понятие *меры* $\mu(A)$ множества A есть естественное обобщение понятий:

1) длина отрезка;

2) площадь S плоской фигуры;

3) объём V пространственной фигуры;

4) приращение $f(b) - f(a)$ неубывающей функции $f(t)$ на промежутке $[a;b)$;

5) интеграл от неотрицательной функции, взятого по некоторой линейной, плоской или пространственной области и т.п.

Свойства меры множества:

1) мера пустого множества равна нулю: $\mu(\varnothing) = 0$;

2) $\mu(A) \geq 0$;

3) $\mu(A) \in R$.

Площади плоских фигур:

1) квадрат (a – сторона; d – диагональ): $S = a^2 = \dfrac{d^2}{2}$;

2) прямоугольник (a, b – стороны): $S = ab$;

3) параллелограмм (a, b – стороны; $\alpha = (a\hat{;}b)$; h – высота, проведённая к a): $S = ah = ab\sin\alpha$;

4) ромб (a – сторона; h – высота, проведённая к a; d_1, d_2 – диагонали; α – угол ромба): $S = ah = \dfrac{1}{2}d_1 d_2 = a^2\sin\alpha$;

5) трапеция (a, b – основания; h – высота): $S = \dfrac{a+b}{2}h$;

6) произвольный четырёхугольник (d_1, d_2 – диагонали; $\alpha = (d_1\hat{;}d_2)$): $S = \dfrac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$;

7) четырёхугольник, около которого можно описать окружность (a, b, c, d – стороны; $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$):
$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$;

8) прямоугольный треугольник (a, b – катеты): $S = \dfrac{1}{2}ab$;

9) равнобедренный треугольник (a – основание; b – боковая сторона): $S = \dfrac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$;

10) правильный (равносторонний) треугольник (a – сторона): $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

11) произвольный треугольник (a, b, c – стороны; h – высота, проведённая к a; $\gamma = (a\hat{;}b)$; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности):

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = p \cdot r;$$

12) многоугольник, описанный около окружности (r – радиус окружности; p – полупериметр): $S = p \cdot r$;

13) правильный шестиугольник (a – сторона): $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$;

14) круг (r – радиус; d – диаметр): $S = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$;

15) сектор (r – радиус; α – градусная мера центрального угла): $S = \frac{\pi \cdot r^2}{360^\circ}\alpha$;

16) сегмент: площадь сегмента находится как разность площадей сектора и треугольника – $S = \frac{\pi \cdot r^2}{360^\circ}\alpha \pm S_\Delta$, $\alpha \neq \pi$, где S_Δ – площадь треугольника с вершинами в центре круга и концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Выбирается знак «–» при $\alpha < \pi$, знак «+» при $\alpha > \pi$.

На практике, если нет достаточных данных, можно пользоваться приближённой формулой: $S \approx \frac{2}{3}ah$, где a – основание сегмента, h – высота.

<u>Объёмы пространственных фигур:</u>

(V – объём; S – площадь основания; h – высота; r – радиус основания)

1) призма и параллелепипед: $V = Sh$;

2) параллелепипед прямоугольный (a, b, c – его измерения): $V = abc$;

3) куб (a – ребро): $S = a^3$;

4) пирамида: $V = \frac{1}{3}Sh$;

5) усечённая пирамида (S_1, S_2 – площади верхнего и нижнего оснований): $V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h$;

6) цилиндр круговой: $V = Sh = \pi \cdot r^2 h$;

7) конус круговой: $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 h$;

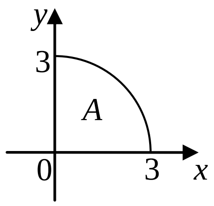
8) усечённый конус круговой (r_1, r_2 – радиусы верхнего и нижнего оснований): $V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$;

9) шар (R – радиус): $V = \frac{4}{3}\pi R^3$;

10) шаровой сегмент (R – радиус шара; h – высота сегмента): $V = \pi \cdot h^2 (R - \frac{1}{3}h)$;

11) шаровой сектор (шаровой сегмент $\pm$ конус) (R – радиус шара; h – высота соответствующего шарового сегмента): $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$.

ПРИМЕР. Вычислить меру множества A, изображённого на рисунке.



Множество A – четверть круга радиуса $r = 3$, следовательно, его мера – это площадь соответствующей фигуры:

$$\mu(A) = \frac{1}{4} S_{\text{кр}} = \frac{1}{4}\pi \cdot r^2 = \frac{9\pi}{4}.$$

§ 2. Числовые множества

1. Числовые множества. Множество действительных чисел.
2. Модуль действительного числа.
3. Расширенная числовая прямая.
4. Числовые промежутки. Окрестность точки.

1. Числовые множества. Множество действительных чисел

Множества могут состоять из объектов самой различной природы. Их элементами могут быть буквы, картины, уравнения и т. д. Есть *числовые множества* – множества, элементами которых являются числа.

<u>Определение.</u> *Натуральные числа* – это числа, которые используются при счёте. Множество натуральных чисел обозначают символом N.

Любое натуральное число можно записать с помощью десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Число 0 натуральным не является.

<u>Определение.</u> Два числа, отличающиеся друг от друга только знаками, называют *противоположными*.

Для каждого числа есть только одно противоположное число. Число 0 противоположно самому себе.

Определение. *Целые числа* – это натуральные числа, противоположные им числа и число 0. Множество целых чисел обозначают символом Z.

Определение. *Рациональными числами* называют числа вида $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$. Множество рациональных чисел обозначают символом Q.

Всякое рациональное число является либо целым числом, либо представляется конечной или периодической бесконечной десятичной дробью.

ПРИМЕР. Числа 3, 0,75 и 0,33333 являются рациональными, так как их можно представить следующими дробями: $3 = 3/1$, $0{,}75 = 3/4$, $0{,}3333... = 1/3$.

Определение. *Иррациональные числа* – это числа, которые нельзя представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$. Множество иррациональных чисел обозначают символом I.

Всякое иррациональное число представляется непериодической бесконечной десятичной дробью. Например, $\sqrt{2} = 1{,}414213...$, $\pi = 3{,}14159....$, $e = 2{,}7182...$

Определение. Рациональные и иррациональные числа составляют множество *действительных (вещественных) чисел*.

Таким образом, любое действительное число представляется бесконечной десятичной дробью. Множество действительных чисел обозначают символом R.

Множество действительных чисел можно взаимно однозначно отразить на числовой прямой, то есть если каждому действительному числу поставить в соответствие точку числовой прямой, то эти точки полностью заполнят всю числовую прямую.

Запишем связь числовых множеств:

$N \subset Z \subset Q \subset R, \quad I \subset R, \quad R = Q \cup I$.

ПРИМЕР. Даны множества:

$A = \{a \mid a \in N,\ 1 \le a < 10\}$, $\quad B = \{b \mid b \in Z,\ -2 \le b < 3\}$,

$C = \{c \mid c \in R,\ -3 < c \le 2{,}6\}$, $D = \{d \mid d \in Q,\ d < 2\}$.

Каким множествам принадлежат числа –2,5; 3; 2,5?

Видно, что $-2{,}5 \in C$ и $-2{,}5 \in D$, $3 \in A$, $2{,}5 \in C$.

2. Модуль действительного числа

Определение. *Абсолютной величиной*, или *модулем* действительного числа x называется неотрицательное число $|x|$, определяемое соотношением

$$|x| = \begin{cases} x, & \textit{если} \quad x \geq 0, \\ -x, & \textit{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Свойства абсолютной величины:

1) $|-x| = |x|$;

2) $|x|^2 = x^2$;

3) $-|x| \leq x \leq |x|$;

4) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$;

5) $|x| \geq a \iff \left[\begin{array}{l} x \leq -a, \\ x \geq a; \end{array}\right.$

6) $|x+y| \leq |x| + |y|$;

7) $|x-y| \leq |x| + |y|$;

8) $|x-y| \geq |x| - |y|$;

9) $|xy| = |x||y|$ (справедливо для любого конечного числа сомножителей);

10) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$.

Геометрической интерпретацией модуля действительного числа a является расстояние от точки a до начала числовой прямой.

Расстояние между точками a и b на числовой прямой вычисляется по формуле

$$\rho(a,b) = |a-b|.$$

3. Расширенная числовая прямая

Ко множеству действительных чисел R добавим два символа: $-\infty$ и $+\infty$, полученное множество назовём *расширенной числовой прямой*, или *расширенным множеством действительных чисел*:

$$\overline{R} = R \cup \{-\infty; +\infty\}.$$

При этом будем считать выполненными следующие условия:

1) $-\infty < x < +\infty$ для $\forall x \in R$;

2) $\dfrac{x}{-\infty} = \dfrac{x}{+\infty} = 0$ для $\forall x \in R$;

3) при $x > 0$ имеем $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$,

при $x < 0$ имеем $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$,

$0 \cdot (+\infty)$ и $0 \cdot (-\infty)$ не имеют смысла;

4) для $\forall x \in R$ $+\infty + x = +\infty$, $-\infty + x = -\infty$,

$+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$, $+\infty - (-\infty) = +\infty$,

$+\infty - (+\infty)$ не имеет смысла.

4. Числовые промежутки. Окрестность точки

Определение. *Промежутком* $< a; b >$ называется совокупность чисел *x*, заключённых между числами *a* и *b*, то есть $a < x < b$, $a, b \in R$.

Числа *a* и *b* называются *концами* промежутка.

Виды промежутков:

$[a;b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$ – *отрезок* или *сегмент*;

$(a;b) = \{x \in R : a < x < b\}$ – *интервал*;

$(a;b] = \{x \in R : a < x \le b\}$, $[a;b) = \{x \in R : a \le x < b\}$ – *полуинтервалы* или *полуотрезки*;

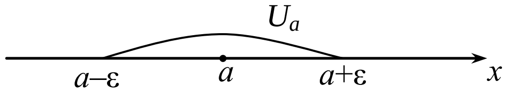
$(-\infty; a] = \{x \in R : x \le a\}$, $[a; +\infty) = \{x \in R : x \ge a\}$ – *лучи*;

$(-\infty; a) = \{x \in R : x < a\}$, $(a; +\infty) = \{x \in R : x > a\}$,

$(-\infty; +\infty) = \{x \in R : -\infty < x < +\infty\} = R$ – *бесконечные интервалы*.

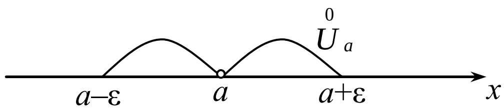
Определение. *Окрестностью* U_a *точки* $a \in R$ называется любой интервал, содержащий точку *a*.

В частности, интервал $U(a; \varepsilon) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε-*окрестностью* точки *a*. Число *a* называется *центром*, а число ε – *радиусом* данной окрестности.

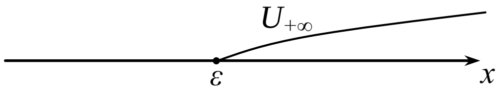


Определение. *Проколотой окрестностью* действительной точки $a \in R$ называется множество $\overset{0}{U}_a = U_a \setminus \{a\}$, то есть это окрестность точки *a* без самой этой точки:

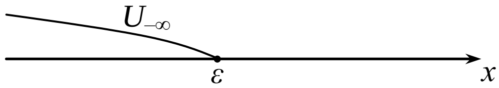
$$\overset{0}{U}_a = (a-\varepsilon; a) \cup (a; a+\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$



<u>Определение.</u> *Окрестностью точки* $+\infty$ называется множество точек $x \in R$, удовлетворяющих неравенству $x > \varepsilon,\ \varepsilon \in R$, то есть это интервал $U_{+\infty} = (\varepsilon; +\infty)$.



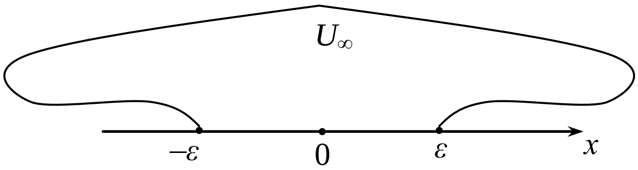
<u>Определение.</u> *Окрестностью точки* $-\infty$ называется множество точек $x \in R$, удовлетворяющих неравенству $x < \varepsilon,\ \varepsilon \in R$, то есть это интервал $U_{-\infty} = (-\infty; \varepsilon)$.



Ко множеству *R* действительных точек добавим ещё один символ ∞ (беззначная бесконечность). Эта бесконечность с числами из множества *R* не связана никакими неравенствами, в отличие от $+\infty$ и $-\infty$ $(\forall x \in R \quad -\infty < x < +\infty)$.

Беззначная бесконечность ∞ связана с числами из множества *R* только через понятие окрестности.

<u>Определение.</u> *Окрестностью точки* ∞ называется множество всех точек $x \in R$, удовлетворяющих неравенству $|x| > \varepsilon,\ \varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$, то есть это интервал $U_\infty = (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$.



§ 3. Функции

1. Понятие функции.
2. График функции.
3. Свойства функций.
4. Сложная функция. Обратная функция.
5. Основные элементарные функции.
6. Элементарные функции.

1. Понятие функции

Определение. Пусть заданы непустые множества X и Y. Говорят, что задано *отображение* множества X во множество Y, если указан закон или правило, по которому каждому элементу множества X поставлен в соответствие один или несколько определённых элементов множества Y.

Отображение также называют *функцией*.

Обозначение $f : X \to Y$ или $y = f(x)$, где $x \in X$, $y \in Y$.

Здесь x – *независимая переменная* или *аргумент* функции,
f – функция,
$f(x)$ – значение функции f в точке x.

Определение. Если каждому аргументу соответствует одно значение функции, то функция называется *однозначной*; если два или больше – то *многозначной*.

Если особо не оговорено, что функция многозначна, то подразумевается, что он однозначна.

Определение. Говорят, что функция *определена* в точке x, если этому значению x соответствует единственное значение $y = f(x)$.

Определение. *Областью определения функции* $y = f(x)$ называется множество значений x, при которых эта функция определена.

Множество X – область определения функции $f : X \to Y$.

Определение. *Областью значений функции* $y = f(x)$ называется множество тех значений y из множества Y, которым поставлен в соответствие хотя бы один элемент из множества X.

Или по-другому, *областью значений функции* $y = f(x)$ называется множество всех значений, принимаемых переменной y.

Для функции $y = f(x)$ область определения обозначается через $D(y)$, область значений – $E(y)$.

Определение. Элемент $f(x)$, принадлежащий Y, называется *образом* элемента x. Элемент x называется *прообразом* элемента $f(x)$.

ПРИМЕР. Дано отображение $y=3x-1$. Найти образы промежутков [1;2], (1;2), [–1;0).

Получим $y:[1;2]\to[2;5]$, $y:(1;2)\to(2;5)$, $y:[-1;0)\to[-4;-1)$.

Определение. Если задано равенство вида $F(x;y)=0$, где $F(x;y)$ – некоторая функция, зависящая от двух числовых аргументов, то говорят, что равенство $F(x;y)=0$ определяет y как *неявную функцию* от x.

Если уравнение $F(x;y)=0$ разрешимо относительно y, то неявная функция может быть приведена к явному виду, то есть к виду $y=f(x)$.

ПРИМЕР. $2x+3y-1=0$ – неявный вид функции y. Выразим y:

$y=\dfrac{1-2x}{3}$ – явный вид функции y.

2. График функции

Определение. *Графиком* функции $y=f(x)$, отображающей множество X во множество Y, называется множество всевозможных точек с координатами (x;y), где $x\in X$, $y=f(x)$.

Если $y=f(x)$ – действительная функция действительного аргумента, то графиком этой функции является некоторое подмножество координатной плоскости.

Способы задания функции:

1) Графический – задаётся график функции.

2) Табличный – функция задаётся таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. Например, таблицы логарифмов, квадратных корней, т. д.

3) Аналитический – функция задаётся в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Построение графиков функций путём сдвига и деформаций:

($y=f(x)$ – исходная функция)

1) $y=f(x+a)$ – сдвиг по оси Ox на $|a|$ единиц влево при $a>0$, вправо при $a<0$*a*<0.

2) $y = f(x) + b$ – сдвиг по оси Oy на $|b|$ единиц вверх при $b > 0$, вниз при $b < 0$.

3) $y = f(x+a) + b$ – применить преобразования 1 и 2.

4) $y = Af(x)$, $A > 0$ – растяжение вдоль оси Oy в A раз при $A > 1$, сжатие при $0 < A < 1$.

5) $y = f(\alpha x)$, $\alpha > 0$ – сжатие вдоль оси Ox в α раз при $\alpha > 1$, растяжение при $0 < \alpha < 1$.

6) $y = |f(x)|$ – часть графика функции $y = f(x)$ над осью Ox оставить такой же, а часть графика под осью Ox отобразить симметрично относительно Ox.

7) $y = f(|x|)$ – часть графика функции $y = f(x)$ справа от оси Oy оставить такой же, а слева построить часть, симметричную правой части относительно Oy.

8) $y = -f(x)$ – симметрия относительно оси Ox.

9) $y = f(-x)$ – симметрия относительно оси Oy.

3. Свойства функций

Рассмотрим функцию $f : X \to Y$, $M \subset X$.

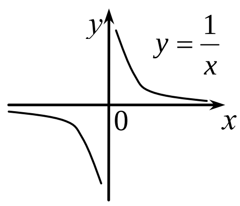
Определение. Функция f называется *возрастающей* (*неубывающей*) на множестве M, если для любых $x_1, x_2 \in M$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$).

Определение. Функция f называется *убывающей* (*невозрастающей*) на множестве M, если для любых $x_1, x_2 \in M$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$).

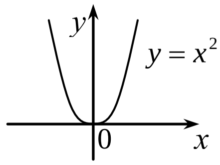
Определение. Функции всех этих типов носят общее название – *монотонные*. Причём возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*, а невозрастающие и неубывающие функции называются *монотонными в широком смысле*. Интервалы, в которых функция монотонна, называются *интервалами монотонности*.

ПРИМЕРЫ

Функция $y = \dfrac{1}{x}$ – убывающая на всей области определения $D(y) = R \setminus \{0\}$.



Функция $y = x^2$ – убывающая на интервале $(-\infty;0)$ и возрастающая на $(0;+\infty)$.



<u>Определение.</u> Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

<u>Определение.</u> Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси Oy, график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

ПРИМЕРЫ.

$y = x^2$ – чётная функция, так как $y(-x) = (-x)^2 = x^2 = y(x)$;

$y = x^3$ – нечётная функция, так как $y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x)$;

$y = 2x - 5$ не является ни чётной, ни нечётной функцией, так как $y(-x) = 2(-x) - 5 = -2x - 5$, то есть $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$.

<u>Определение.</u> Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что для любого x из области определения функции выполняется $f(x+T) = f(x) = f(x-T)$.

При этом число T называется *периодом* функции.

График периодической функции периодически повторяется.

ПРИМЕР. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ имеют период $T = 2\pi$, функции $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$ имеют период $T = \pi$.

<u>Определение.</u> Функция f называется *ограниченной* на множестве M, если существует действительное число $k > 0$ такое, что для любого x из множества M выполняется неравенство $|f(x)| \leq k$. В противном случае функция называется *неограниченной*.

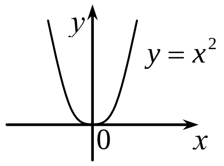
Или по-другому, функция f называется *ограниченной* на множестве M, если на этом множестве ограничено множество значений этой функции.

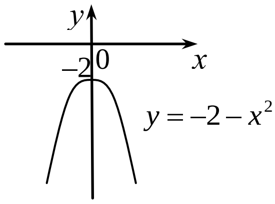
ПРИМЕРЫ.

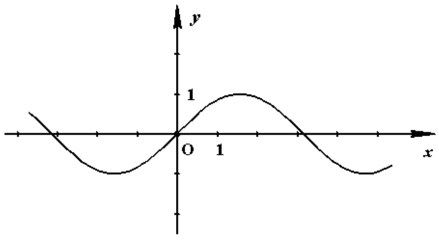
$y = x^2$ ограничена на R снизу ($y \geq 0$);

$y = -2 - x^2$ ограничена на R сверху ($y \leq -2$);

$y = \sin x$ ограничена на R $(-1 \le y \le 1)$.







$y = \sin x$

4. Сложная функция. Обратная функция

Определение. Величина y называется *сложной* функцией или *функцией от функции*, если она рассматривается как функция от некоторой (вспомогательной) переменной u, которая в свою очередь зависит от аргумента x:

$$y = f(u),\ u = \varphi(x).$$

Тем самым y оказывается функцией от x, то есть

$$y = f[\varphi(x)].$$

ПРИМЕР. Если $y = u^3$ и $u = 1 + x^2$, то $y = (1 + x^2)^3$ – сложная функция от x.

Пусть дана функция $y = f(x)$ с областью определения D и областью значений E.

Определение. Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и областью значений D. Такая функция называется *обратной* к функции $f(x)$ и записывается в виде $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$.

Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются *взаимно обратными*.

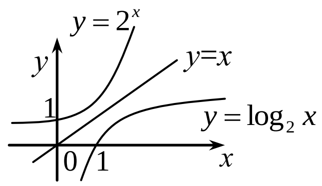
ПРИМЕР. Для функции $y = x^2$, $x \in [0;5]$ обратной является функция $x = \sqrt{y}$.

Замечание. Функция $y = f(x)$ имеет обратную функцию тогда и только тогда, когда функция $y = f(x)$ задаёт взаимно однозначное соответствие между множествами D и E.

Всякая строго монотонная функция имеет обратную функцию, при этом обратная функция также строго монотонна. Если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

Обычно обозначения переменных меняют ролями и аргумент обратной функции обозначают буквой x, как и аргумент прямой функции y.

ПРИМЕРЫ.



Для функции $y=x^2,\ x\ge 0$ обратной является функция $y=\sqrt{x}$,

для функции $y=2^x$ обратной является функция $y=\log_2 x$.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$.

Правило нахождения обратной функции: чтобы получить обратную функцию для $y=f(x)$, надо вместо y написать x, а вместо x записать y, то есть получить функцию $x=f(y)$, а затем выразить из полученной функции y. Полученная функция и будет обратной функцией для заданной функции $y=f(x)$.

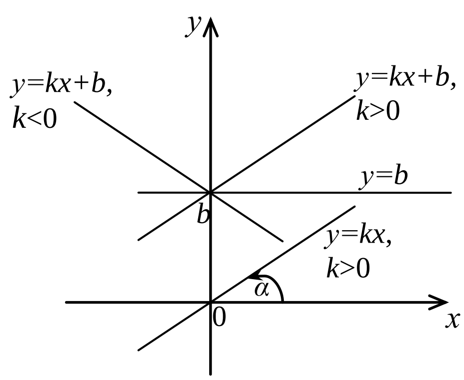
5. Основные элементарные функции

1. *Линейная* функция – функция вида $y=kx+b,\ k,b\in R$. Графиком линейной функции является прямая линия, для которой $k=\mathrm{tg}\,\alpha$ – *угловой коэффициент*.

1) $D(y)=R,\ E(y)=R$.

2) Ни чётная, ни нечётная.

3) При $k>0$ возрастает на R, при $k<0$ убывает на R.

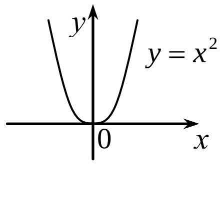


При $k=0$ получаем *постоянную функцию* $y=b$, её график – прямая, параллельная оси Ox.

Если $b=0$, то имеем *прямую пропорциональность* $y=kx$, её график – прямая, проходящая через начало координат.

2. *Квадратичная* функция – функция вида $y=ax^2,\ a\in R$, $a\ne 0$.

Графиком квадратичной функции является парабола с вершиной в начале координат и осью симметрии Oy.

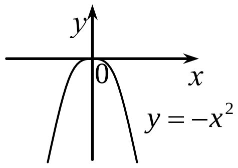


1) $D(y) = R$;

при $a > 0$ $E(y) = [0;+\infty)$, при $a < 0$ $E(y) = (-\infty;0]$.

2) Чётная.

3) При $a > 0$ возрастает на $(0;+\infty)$ и убывает на $(-\infty;0)$; при $a < 0$ возрастает на $(-\infty;0)$ и убывает на $(0;+\infty)$.



Функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in R$ – квадратичная функция общего вида. Её графиком является парабола с вершиной в точке $\left(-\dfrac{b}{2a}; c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$ и осью симметрии, параллельной оси *Oy*.

3. *Степенная* функция – функция вида $y = x^n$, $n \in R$.

Возможны случаи:

1. При $n = 0$ имеем $y = 1$ – постоянная функция.

2. n – целое число:

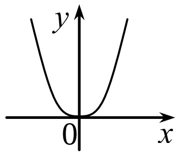
а) $n = 1$, то есть $y = x$ – линейная функция, график которой есть биссектриса I и III координатных углов.

б) $n > 0$ (натуральное)

n – чётное

$D(y) = R$

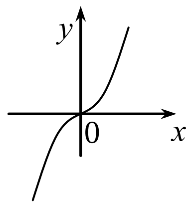
$E(y) = [0;+\infty)$



n – нечётное

$D(y) = R$

$E(y) = R$

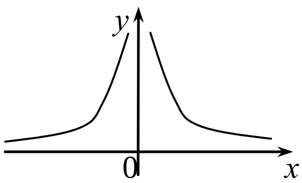


в) $n < 0$

n – чётное

$D(y) = R \setminus \{0\}$

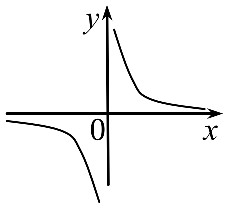
$E(y) = (0;+\infty)$



n – нечётное

$D(y) = R \setminus \{0\}$

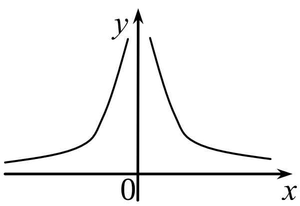
$E(y) = R \setminus \{0\}$



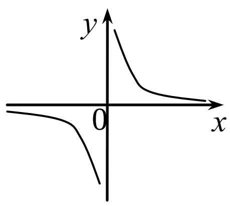
3. n – рациональное (дробное), пусть $n = \dfrac{p}{q}$ – несократимая дробь:

а) $n < 0$

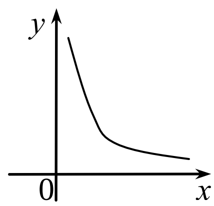
p – чётное, q – нечётное



p, q – нечётное

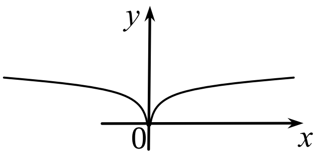


p – нечётное, q– чётное

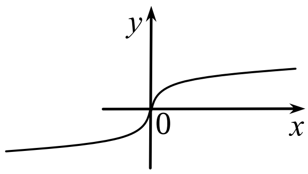


б) $0 < n < 1$

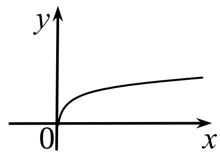
p – чётное, q – нечётное



p, q – нечётное

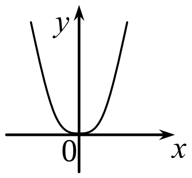


p – нечётное, q– чётное

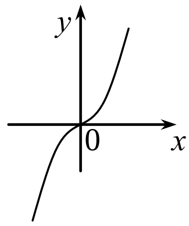


в) $n > 1$

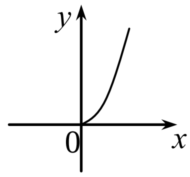
p – чётное, q – нечётное



p, q – нечётное

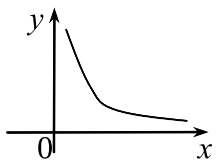


p – нечётное, q– чётное

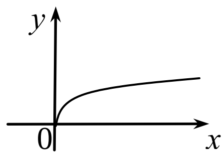


4. n – иррациональное:

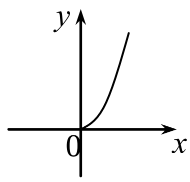
а) $n < 0$



б) $0 < n < 1$



в) $n > 1$

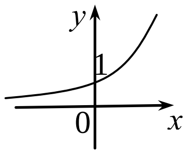


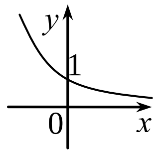
4. *Показательная* функция – функция вида $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

1) $D(y) = R$, $E(y) = (0;+\infty)$.

2) Ни чётная, ни нечётная.

3) При $a > 1$ возрастает на R, при $0 < a < 1$ убывает на R.



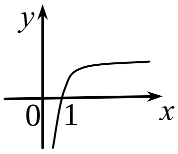


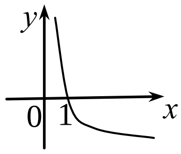
5. *Логарифмическая* функция – функция вида $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

1) $D(y) = (0;+\infty)$, $E(y) = R$.

2) Ни чётная, ни нечётная.

3) При $a > 1$ возрастает на $D(y)$, при $0 < a < 1$ убывает на $D(y)$.





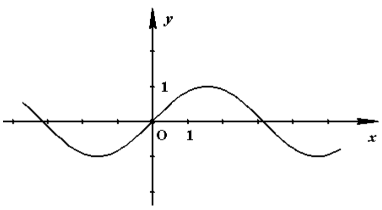
4) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $a^{\log_a x} = x$;

$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$, $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$,

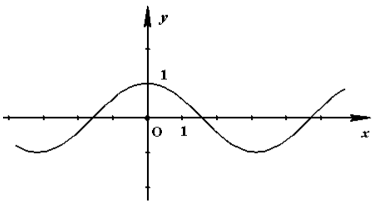
$\log_a x^n = n\log_a x$, $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

6. *Тригонометрические* функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$.

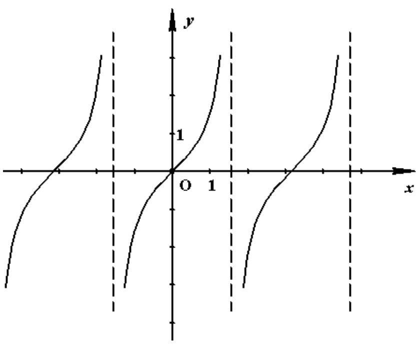
$y = \sin x$:
$D(y) = R$
$E(y) = [-1;1]$
период $T = 2\pi$
нечётная



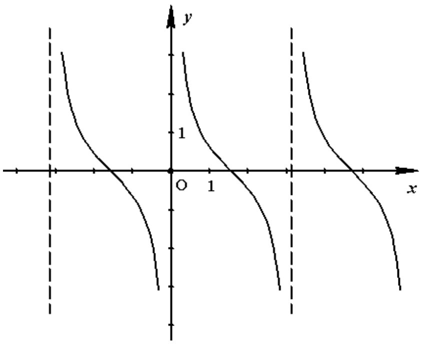
$y = \cos x$:
$D(y) = R$
$E(y) = [-1;1]$
период $T = 2\pi$
чётная



$y = \mathrm{tg} x$:
$D(y) = (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$
$E(y) = R$
период $T = \pi$
нечётная



$y = \mathrm{ctg} x$:
$D(y) = (\pi k; \pi + \pi k)$
$E(y) = R$
период $T = \pi$
нечётная



7. *Обратные тригонометрические* функции:
$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

Обратные тригонометрические функции многозначны, поэтому существует понятие главных значений этих функций.

$y=\arcsin x$:
$D(y)=[-1;1]$
$E(y)=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

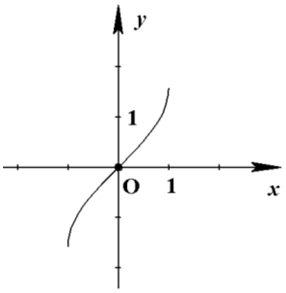
$y=\arccos x$:
$D(y)=[-1;1]$
$E(y)=[0;\pi]$

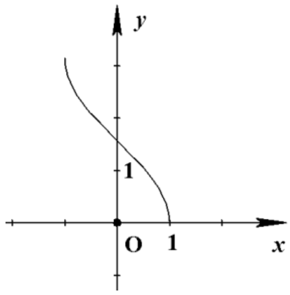
(область значений для главных значений функций)

$E(y)=R$ $\quad$ $E(y)=R$

(область значений в общем случае)

нечётная $\quad$ ни чётная, ни нечётная





$y=\operatorname{arctg} x$:
$D(y)=R$
$E(y)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

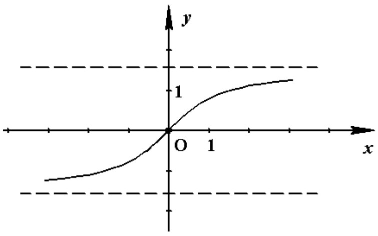
$y=\operatorname{arcctg} x$:
$D(y)=R$
$E(y)=(0;\pi)$

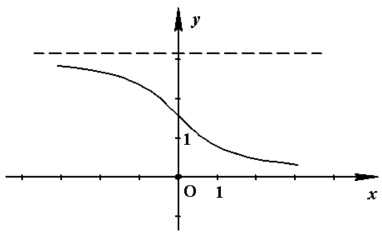
(область значений для главных значений функций)

$E(y)=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi k\}$ $\quad$ $E(y)=R\setminus\{\pi k\}$

(область значений в общем случае)

нечётная $\quad$ ни чётная, ни нечётная





Определение. Степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические функции называются *основными элементарными функциями.*

6. Элементарные функции

Определение. *Элементарной функцией* $y = f(x)$ называется функция, заданная с помощью основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и взятия функции от функции.

ПРИМЕРЫ. 1) $y = \dfrac{3+x^2}{1+\lg x}$, $y = \ln(\lg(5+2\sqrt[3]{1-6\sin x}))$ – элементарные функции;
2) $y = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ – неэлементарная функция, так как её нельзя выразить конечным числом элементарных действий (чем больше *n*, тем больше умножений надо выполнить).

Из элементарных функций выделяют следующие классы функций, называемых *алгебраическими*:

1) целые рациональные функции, то есть многочлены $P_n(x)$ вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – числа;

2) дробно-рациональные функции, то есть частное двух многочленов:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_mx^m};$$

3) иррациональные функции, то есть функции, заданные с помощью корней различных степеней из целых или дробно-рациональных функций.

Остальные элементарные функции принято называть *трансцендентными*.

ПРИМЕРЫ. $y = 2x - 3x^2 + \frac{4}{5}x^6$ – целая функция;

$y = \dfrac{2x+7x^9}{1+3x+0{,}2x^{10}}$ – дробно-рациональная функция;

$y = \sqrt[4]{5x^3-1}$, $y = \dfrac{9x^3}{\sqrt[5]{2-x}}$ – иррациональные функции;

$y = \dfrac{13+6x}{\sin 3x + \ln x}$ – трансцендентная функция.

§ 4. Предел функции

1. Предел функции.
2. Примеры вычисления пределов.
3. Некоторые теоремы о конечных пределах.
4. Первый замечательный предел.
5. Второй замечательный предел.
6. Односторонние пределы.
7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
8. Некоторые замечательные пределы.

1. Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (здесь рассматриваются случаи $a \in R$, $a = \pm\infty$), причём в самой точке $x = a$ функция либо определена, либо нет.

Обозначение предела функции: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Геометрический смысл предела функции: для всех точек x, достаточно близких к точке a, соответствующие им значения функции $f(x)$ будут сколь угодно мало отличаться от числа A.

При вычислении предела функции следует подставить в функцию предельное значение аргумента. Если при этом получится конечное число или бесконечность, то это значение и является пределом функции.

ПРИМЕРЫ.

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 + 3x - 4}{2x + 3} = \dfrac{3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 4}{2 \cdot 2 + 3} = \dfrac{14}{7} = 2$,

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(3 + \dfrac{1}{x} \right) = 3 + \dfrac{1}{\infty} = 3 + 0 = 3$.

<u>Свойства предела функции</u>:

(пусть существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$)

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$, $c = const$;
2. $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \pm g(x) \big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x) \big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$;
4. $\lim\limits_{x \to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, здесь $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.

2. Примеры вычисления пределов

ПРИМЕР 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2-3x}$.

Подставим вместо x его предельное значение ∞, получим выражение $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2-3x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Запись $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ является условной и означает, что числитель и знаменатель дроби стремятся к ∞, когда $x\to\infty$. К какому пределу стремится вся дробь, пока не ясно. В таких случаях говорят, что имеет место *неопределённость*. Приведём примеры неопределённостей:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right),\ \left(\frac{0}{0}\right),\ (\infty-\infty),\ (0\cdot\infty),\ (1^{\infty}),\ (0^0),\ (\infty^0).$$

Все другие выражения неопределенностями не являются и принимают вполне конкретное конечное или бесконечное значение, например,

$0^{\infty}=0$, $\dfrac{\infty}{0}=\infty\cdot\dfrac{1}{0}=\infty\cdot\infty=\infty$.

Раскрыть неопределённость – это значит вычислить предел, избавляясь от неопределённости с помощью преобразований, либо показать, что предел не существует.

В примере 1 чтобы раскрыть неопределённость, надо разделить числитель и знаменатель дроби на x в наивысшей степени, встречающейся в данном выражении, то есть на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{3}{x}}=\frac{1+\dfrac{1}{\infty}}{2-\dfrac{3}{\infty}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}.$$

В общем случае предел частного многочленов при $x\to\infty$ равен:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}=\begin{cases}0,\ n<m,\\ \dfrac{a_n}{b_m},\ n=m,\\ \infty,\ n>m.\end{cases}$$

Это правило объясняется тем, что степенная функция данной степени *растёт быстрее*, чем любая степенная функция более низкой степени. И быстрее**,** чем сумма любого количества степенных функций более низкой степени.

ПРИМЕР 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$.

$$\lim_{x\to-3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2-9}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-3}\frac{2(x-0{,}5)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to-3}\frac{2x-1}{x-3}=\frac{7}{6},$$

здесь $2x^2+5x-3=0$, $D=b^2-4ac=25-4\cdot2\cdot(-3)=49$, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, $x_1=\dfrac{-5+7}{4}=0{,}5$, $x_2=\dfrac{-5-7}{4}=-3$, то есть $2x^2+5x-3=2(x-0{,}5)(x+3)$.

В примере 2 числитель и знаменатель дроби разложили на множители, а затем сократили дробь на общий множитель $(x+3)$. В результате неопределённость исчезла.

ПРИМЕР 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-16}$.

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-16}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{(x^2-16)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x+5)-3^2}{(x^2-16)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x^2-16)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{(x+4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\frac{1}{8\cdot6}=\frac{1}{48}.$$

В примере 3 избавились от иррациональности с помощью умножения и числителя, и знаменателя дроби на сопряжённое выражение к выражению, содержащему иррациональность.

3. Некоторые теоремы о конечных пределах

Теорема 1. *Если функция* $f(x)$ *имеет конечный предел в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности точки a.*

Теорема 2. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, *то* $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-A\big)=0$.

Теорема 4. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, *то* $\forall k\in R$ $\lim\limits_{x\to a}(k\cdot f(x))=k\cdot A$.

Теорема 5. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, *а функция* $g(x)$ *ограничена в некоторой окрестности точки a, то* $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=0$.

4. Первый замечательный предел

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, раскрывает неопределённость $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

ПРИМЕРЫ.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=1.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot 3}{3x\cdot 4}=\frac{3}{4}.$$

5. Второй замечательный предел

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$, раскрывает неопределённость (1^{∞}).

ПРИМЕР.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x+4}{7x+9}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(7x+9)-5}{7x+9}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{7x+9}\right)^{3x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{7x+9}\right)^{\frac{7x+9}{-5}\cdot\frac{-5}{7x+9}\cdot(3x+2)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-5(3x+2)}{7x+9}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5(3x+2)}{7x+9}}=$$

$$=e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5\left(\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}\right)}{\frac{7x}{x}+\frac{9}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5\left(3+\frac{2}{x}\right)}{7+\frac{9}{x}}}=e^{\frac{-5(3+0)}{7+0}}=e^{-\frac{15}{7}}.$$

6. Односторонние пределы

Определение. Если значение функции $f(x)$ стремится к числу A_1 (A_2), в то время как x стремится к числу a со стороны меньших значений, то есть слева (со стороны больших значений, то есть справа), то число A_1 (A_2) называют *левосторонним* (*правосторонним*) *пределом* функции $f(x)$ в точке a:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) = A_1, \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) = A_2.$$

Определение. Левосторонний и правосторонний пределы называются *односторонними* пределами.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(a-0) = f(a+0) = A.$

Теорема 2. *Если хотя бы один из односторонних пределов* $f(a-0)$ *или* $f(a+0)$ *не существует, то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *не существует.*

Теорема 3. *Если* $f(a+0) = A$, $f(a-0) = B$ *и* $A \neq B$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *не существует.*

7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой в точке a* (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

ПРИМЕР. $\alpha(x) = \dfrac{1}{x}$ – бесконечно малая функция при $x \to \infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Теорема 1. *Если* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *бесконечно малые функции при* $x \to a$, *то функции* $\alpha(x) \pm \beta(x)$, $\alpha(x)\cdot\beta(x)$, $c\cdot\alpha(x)$, $c = const$ *также являются бесконечно малыми функциями при* $x \to a$.

Определение. Говорят, что функция $\alpha(x)$ является *бесконечно малой более высокого порядка* по сравнению с функцией $\beta(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то говорят, что функция $\alpha(x)$ является *бесконечно малой более низкого порядка* по сравнению с функцией $\beta(x)$ при $x \to a$.

ПРИМЕР. Даны функции $\alpha(x)=(x-2)^3$, $\beta(x)=x-2$. Найдём их пределы при $x\to 2$:

$\lim\limits_{x\to 2}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^3=0$, $\lim\limits_{x\to 2}\beta(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$, то есть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to 2$.

Так как $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^3}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0$, то $(x-2)^3$ – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $x-2$ при $x\to 2$.

<u>Определение.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$, $c\neq 0, c\in R$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка* при $x\to a$.

<u>Определение.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* при $x\to a$, то есть $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Теорема 2. *Если $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$ и $\exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$, то $\exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.*

Данная теорема позволяет во многих случаях упрощать отыскание пределов.

ПРИМЕР. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1$, то есть $\sin x\sim x$, $\mathrm{tg}x\sim x$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{tg}3x}\overset{\text{Т.2}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x}=\dfrac{5}{3}$.

<u>Определение.</u> Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой в точке* a, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

ПРИМЕР. Функция $y=\dfrac{1}{(x-2)^3}$ – бесконечно большая в точке $x=2$, так как $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^3}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

Теорема 3. *Если $f(x)$ – бесконечно большая функция в точке а, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая функция в точке а; если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция в точке а и $\alpha(x)\neq 0$ в некоторой проколо-*

той окрестности $\overset{0}{U}_a$ *точки а, то функция* $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ *– бесконечно большая функция в точке а.*

Теорема 4. *Если* $f(x)$ *и* $g(x)$ *– бесконечно большие функции в точке а, то функции* $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $c\cdot f(x)$, $c=const$ *также являются бесконечно большими в точке а.*

8. Некоторые замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}=1$;
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$;
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$;
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$.

§ 5. Непрерывность функции

1. Понятие непрерывности функции.
2. Точки разрыва.
3. Основные свойства непрерывных функций.

1. Понятие непрерывности функции

Известно, что графиком, например, степенной функции является кривая, «сплошная», «непрерывная» линия (эту линию мы рисуем, не отрываясь от бумаги – непрерывно). Дадим точное математическое понятие непрерывности.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если предел функции $y=f(x)$ в точке x_0 равен значению функции в этой точке, то есть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на интервале* $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

2. Точки разрыва

Определение. Если функция $y = f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ *разрывна*, а точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Определение. Точка x_0 разрыва функции $y = f(x)$ называется *точкой разрыва первого рода*, если существуют конечные односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0, то есть $f(x_0 - 0) \in R$, $f(x_0 + 0) \in R$ (рис. 1).

Определение. Абсолютная величина $|f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)|$ разности между односторонними пределами функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется *скачком* или *разрывом* функции.

Определение. Точка x_0 разрыва первого рода функции $y = f(x)$ называется *точкой устранимого разрыва*, если односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0 равны между собой, но не равны значению функции $f(x)$ в точке x_0, то есть $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ (рис. 2).

Чтобы устранить разрыв достаточно определить функцию $f(x)$ в точке x_0.

Определение. Если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 равен ∞ или не существует, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода* (рис. 3).

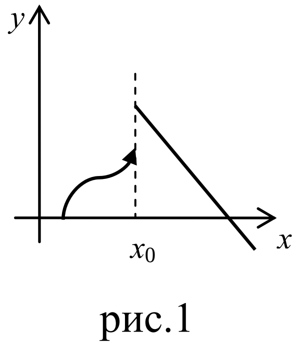


рис.1

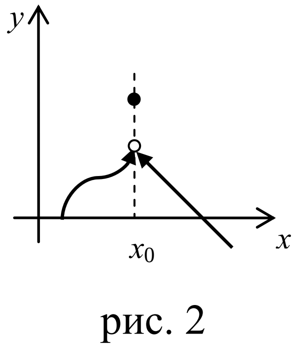


рис. 2

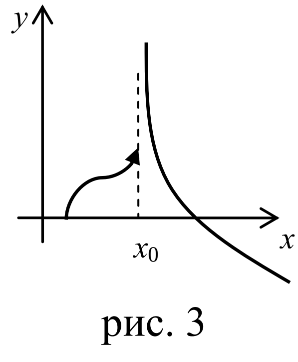


рис. 3

ПРИМЕРЫ.

1) Исследуем функцию $y=\begin{cases} x^2, & x<1, \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$ на непрерывность.

Каждая из составных функций $y=x^2$, $y=2x$ являются непрерывными на всей числовой прямой. Вопрос о непрерывности встаёт на границе перехода от одной функции к другой. Таким образом, следует рассмотреть граничную точку $x_0=1$ и найти в ней односторонние пределы.

$$y(1-0)=\lim_{\substack{x\to 1-0 \\ (x<1)}} y=\lim_{x\to 1-0} x^2=1\in R;$$

$$y(1+0)=\lim_{\substack{x\to 1+0 \\ (x>1)}} y=\lim_{x\to 1+0} 2x=2\in R.$$

Следовательно, $x_0=1$ – точка разрыва первого рода (рис. 4).

Найдём скачок функции: $|y(1-0)-y(1+0)|=|1-2|=1$.

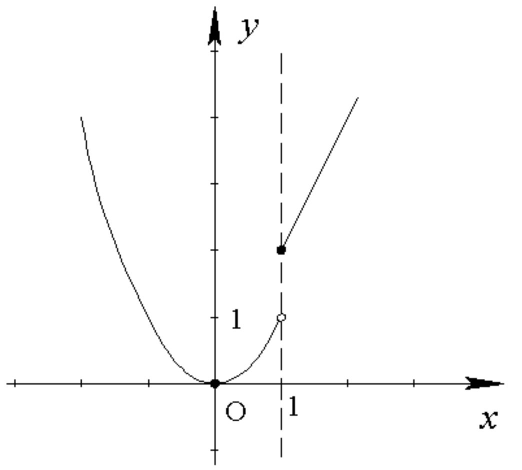


рис. 4

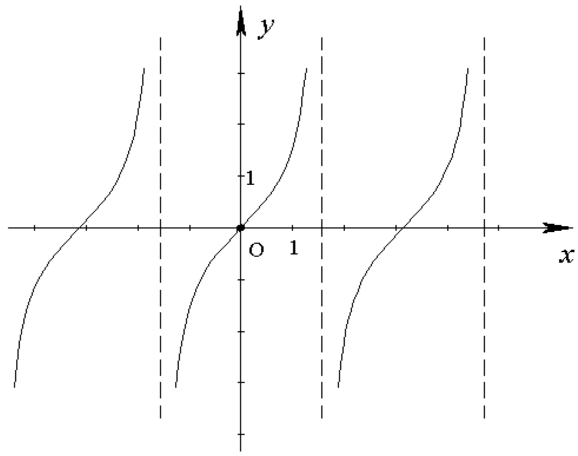


рис. 5

2) Рассмотрим функцию $y=\mathrm{tg}x$. Для неё точки $x_0=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ – точки разрыва второго рода (рис. 5), так как $y(x_0-0)=+\infty$, $y(x_0+0)=-\infty$.

3. Основные свойства непрерывных функций

Теорема 1. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в точке* x_0, *то в данной точке непрерывны функции* $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *если* $g(x_0) \neq 0$.

Теорема 2 (непрерывность сложной функции). *Если функция* $y = f(u)$ *непрерывна в точке* u_0 *и* $u = \varphi(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *причём* $u_0 = \varphi(x_0)$, *то сложная функция* $y = f(\varphi(x))$ *непрерывна в точке* x_0.

Теорема 3. *Если* $f(x)$ *– непрерывная функция, имеющая однозначную обратную функцию, то обратная функция также непрерывна.*

Теорема 4. *Все основные элементарные функции непрерывны во всех точках области определения.*

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 *слева* (*справа*), если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна на интервале $(a;b)$ и в точке $x = a$ непрерывна справа, в точке $x = b$ непрерывна слева.

Теорема 5. *Функция* $y = f(x)$ *является непрерывной в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда* $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Теорема 6 (о нуле непрерывной функции). *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то существует хотя бы одна точка* $x_0 \in [a;b]$ *такая, что* $f(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы 6: если функция принимает на концах отрезка значения разных знаков, то график этой функции пересекает ось Ox внутри этого отрезка.

Теорема 7. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то она ограничена на нём.*

§ 6. Производная функции одной переменной

1. Понятие производной.

2. Правила дифференцирования. Дифференцирование сложной, обратной функций.

3. Таблица производных.

4. Геометрический и физический смыслы производной.

5. Производная неявной функции.

6. Производная параметрически заданной функции.

7. Логарифмическое дифференцирование.

1. Понятие производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале $(a;b)$, x_0 и x – два произвольных значения аргумента из этого интервала: $x_0 \in (a;b)$, $x \in (a;b)$. Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, то есть $x = x_0 + \Delta x$.

Определение. Говорят, что для перехода от значения аргумента x_0 к значению x первоначальному значению придано *приращение* Δx.

Определение. *Приращением* Δy функции $y = f(x)$, соответствующим приращению Δx аргумента x в точке x_0, называется разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение. *Производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения Δy функции в точке x_0 к приращению Δx аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует.

Обозначение:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если существует конечная производная данной функции в точке x_0.

Определение. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

<u>Определение.</u> Если существует левосторонний (правосторонний) предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, то он называется *левосторонней* (*правосторонней*) *производной* функции $y=f(x)$ в точке x_0, то есть

$$f'(x_0-0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ \left(f'(x_0+0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right).$$

<u>Определение.</u> Функция $y=f(x)$, дифференцируемая в каждой точке интервала $(a;b)$, называется *дифференцируемой на интервале* $(a;b)$.

<u>Определение.</u> Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой на отрезке* $[a;b]$, если она дифференцируема на интервале $(a;b)$ и в точке $x=a$ существует правосторонняя производная, а в точке $x=b$ – левосторонняя производная.

2. Правила дифференцирования. Дифференцирование сложной, обратной функций

Теорема 1 (правила дифференцирования). *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то в этой точке дифференцируемы функции $u(x)\pm v(x)$, $u(x)\cdot v(x)$, $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ при $v(x_0)\neq 0$, причём имеют место формулы:*

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;
2) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$;
3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$.

<u>Следствия:</u>

1. Если $c=const$, то $(c\cdot u)'=c\cdot u'$.
2. Если $y=u\cdot v\cdot w$, то $y'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'$.

Теорема 2 (дифференцирование сложной функции). *Пусть функция $u=\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y=f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u_0=\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y=f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0, причём справедлива формула:*

$$y'(x_0)=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

Следствие. Теорема справедлива и в случае сложной функции, являющейся композицией трёх и более функций.

Например, если функция $v=\psi(x)$ дифференцируема в точке x_0, функция $u=\varphi(v)$ дифференцируема в точке $v_0=\psi(x_0)$, функция $y=f(u)$ дифференцируема в точке $u_0=\varphi(v_0)$, то сложная функция $y=f\big(\varphi(\psi(x))\big)$ дифференцируема в точке x_0, причём

$$y'(x_0)=f'(u_0)\cdot\varphi'(v_0)\cdot\psi'(x_0).$$

Теорема 3 (дифференцирование обратной функции). *Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна, строго монотонна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в некоторой точке $x_0\in[a;b]$, причём $f'(x_0)\neq 0$. Тогда для обратной функции $x=\varphi(y)$ в точке $y_0=f(x_0)$ существует производная, равная $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.*

3. Таблица производных

1. $(c)'=0,\ c=const$
2. $(x)'=1$
3. $(x^n)'=nx^{n-1}$
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$
5. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
6. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$
7. $\left(e^x\right)'=e^x$
8. $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
9. $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$
10. $(\sin x)'=\cos x$
11. $(\cos x)'=-\sin x$
12. $(\mathrm{tg}\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
13. $(\mathrm{ctg}\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
14. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\mathrm{arctg}\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
17. $(\mathrm{arcctg}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Таблица производных содержит производные от основных элементарных функций. Все эти формулы получаются непосредственно по определению производной, либо с помощью производной обратной функции.

Зная эту таблицу и свойства производной, можно находить производные от более сложных функций, являющихся комбинациями элементарных функций.

4. Геометрический и физический смыслы производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a;b)$ и дифференцируема в точке $x_0 \in (a;b)$.

Геометрический смысл производной: *угловой коэффициент касательной в точке* $M_0(x_0; f(x_0))$ *к графику функции* $y = f(x)$ *равен производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0, *то есть*:

$$k = f'(x_0).$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Определение. Прямая, проходящая через точку кривой перпендикулярно к касательной в этой точке, называется *нормалью* к кривой в данной точке.

Уравнение нормали в точке $(x_0; f(x_0))$ при $f'(x_0) \neq 0$ имеет вид

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

ПРИМЕР. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^2 + x$ в точке $M_0(1;\, 2)$.

Так как $y' = 2x + 1$, то в точке $M_0(1;\, 2)$ (здесь $x_0 = 1$, $f(x_0) = 2$) получим $y'(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Тогда уравнение касательной в точке M_0 имеет вид:

$$y = 3(x-1) + 2,\ 3x - y - 1 = 0.$$

Уравнение нормали в точке M_0 ($f'(x_0) = 3 \neq 0$):

$$y = -\frac{1}{3}(x-1) + 2,\ x + 3y - 7 = 0.$$

Физический смысл производной: *производная от пути по времени в точке t есть мгновенная скорость точки в момент времени t.*

Пусть $s = s(t)$ – закон движения материальной точки (движение прямолинейное), тогда

$$v(t) = s'(t).$$

Аналогично, *производная от скорости по времени в точке t есть ускорение в момент времени t*:

$$a = v'(t).$$

ПРИМЕР. Пусть материальная точка движется по закону $s = t^3 - 2t + 5$. Найти скорость точки через 3 секунды после начала движения.

$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 2$. Тогда $v(3) = 3 \cdot 3^2 - 2 = 25$ (м/с).

5. Производная неявной функции

Существуют функции, которые невозможно записать в явном виде. В этом случае возникает необходимость вычисления производной от неявной функции вида $F(x; y) = 0$, то есть функции, заданной уравнением, в котором y явно не выражен через x.

Общей формулы для производной неявной функции не существует. Рассмотрим два правила для вычисления производной неявной функции.

Правило 1. Для вычисления производной неявной функции надо продифференцировать обе части уравнения, задающего эту функцию, считая при этом, что y зависит от x. Затем из полученного после дифференцирования уравнения надо выразить y'.

ПРИМЕР. Найти y', если $y - \sin(x^2 \cdot y) = 5\cos 6x + 1$.

Продифференцируем обе части этого уравнения, считая, что $y = y(x)$:

$$y' - \cos(x^2 \cdot y) \cdot ((x^2)' \cdot y + x^2 \cdot y') = 5 \cdot (-\sin 6x) \cdot 6,$$

$$y' - \cos(x^2 \cdot y) \cdot (2xy + x^2 \cdot y') = -30\sin 6x,$$

$$y' - 2xy\cos(x^2 \cdot y) - x^2 y' \cos(x^2 \cdot y) = -30\sin 6x,$$

$$y'(1 - x^2\cos(x^2 \cdot y)) = 2xy\cos(x^2 \cdot y) - 30\sin 6x,$$

$$y' = \frac{2xy\cos(x^2 \cdot y) - 30\sin 6x}{1 - x^2\cos(x^2 \cdot y)}.$$

Правило 2. Для вычисления производной y' неявной функции $F(x;y)=0$ надо продифференцировать левую часть уравнения $F(x;y)$ сначала только по переменной *x*, при этом считая *y* постоянной (числом), – получим F'_x, а затем только по *y*, считая *x* постоянной (числом), – получим F'_y. Тогда производная y' неявной функции равна

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

ПРИМЕР. Найти y', если $y-\sin(x^2\cdot y)=5\cos 6x+1$.

Приведём данное равенство к виду $F(x;y)=0$. Для этого перенесём правую часть влево, получим

$$y-\sin(x^2\cdot y)-5\cos 6x-1=0.$$

Следовательно, $F(x;y)=y-\sin(x^2\cdot y)-5\cos 6x-1$.

Продифференцируем левую часть $F(x;y)$:

по *x* (*y* – число): $F'_x=-\cos(x^2\cdot y)\cdot 2xy-5\cdot(-\sin 6x)\cdot 6$,

по *y* (*x* – число): $F'_y=1-\cos(x^2\cdot y)\cdot x^2$,

тогда по формуле получим

$$y'=-\frac{-2xy\cos(x^2\cdot y)+30\sin 6x}{1-x^2\cos(x^2\cdot y)}=\frac{2xy\cos(x^2\cdot y)-30\sin 6x}{1-x^2\cos(x^2\cdot y)}.$$

6. Производная параметрически заданной функции

Пусть функция $y=f(x)$ задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t\in(\alpha;\beta). \end{cases}$$

Тогда её производная вычисляется по формуле

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

ПРИМЕР. Найти производную функции $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t. \end{cases}$

Так как $x'_t=(2\cos t)'=-2\sin t$,

$y'_t=(2\sin t)'=2\cos t$, то получим

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2\cos t}{-2\sin t}=-\operatorname{ctg} t.$$

7. Логарифмическое дифференцирование

Определение. *Логарифмическим дифференцированием* называют приём дифференцирования, при котором производная от заданной функции отыскивается с помощью производной от её логарифма.

Это значит, что если дана функция $y = f(x)$, то для нахождения её производной сначала логарифмируют эту функцию:

$$\ln y = \ln f(x),$$

при этом применяют все возможные свойства логарифмов. А затем дифференцируют полученное равенство:

$$\frac{y'}{y} = [\ln f(x)]',$$

откуда выражают производную y':

$$y' = y \cdot [\ln f(x)]'.$$

ПРИМЕР. Рассмотрим показательно-степенную функцию $y = \left(\dfrac{x^6 \cdot \sin 4x}{\sqrt{x - x^2}}\right)^{3x}$. Прологарифмируем её:

$$\ln y = \ln\left(\frac{x^6 \cdot \sin 4x}{\sqrt{x - x^2}}\right)^{3x}.$$

В силу свойств логарифма, упростим правую часть полученного равенства:

$$\ln\left(\frac{x^6 \cdot \sin 4x}{\sqrt{x - x^2}}\right)^{3x} = 3x \cdot \ln\left(\frac{x^6 \cdot \sin 4x}{\sqrt{x - x^2}}\right) = 3x\left(\ln(x^6 \cdot \sin 4x) - \ln\sqrt{x - x^2}\right) =$$

$$= 3x \cdot \left(\ln x^6 + \ln \sin 4x - \ln(x - x^2)^{0,5}\right) =$$

$$= 3x \cdot \left(6 \ln x + \ln \sin 4x - 0,5 \ln(x - x^2)\right).$$

Получим $\ln y = 3x \cdot \left(6 \ln x + \ln \sin 4x - 0,5 \ln(x - x^2)\right)$.

Продифференцируем последнее равенство:

$$\frac{y'}{y} = (3x)' \cdot \left(6 \ln x + \ln \sin 4x - 0,5 \ln(x - x^2)\right) +$$

$$+ 3x \cdot \left(6 \ln x + \ln \sin 4x - 0,5 \ln(x - x^2)\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = 3\left(6 \ln x + \ln \sin 4x - 0,5 \ln(x - x^2)\right) +$$

$$+3x\cdot\left(\frac{6}{x}+\frac{1}{\sin 4x}\cos 4x\cdot 4-0{,}5\frac{1}{x-x^2}(1-2x)\right),$$

$$\frac{y'}{y}=18\ln x+3\ln\sin 4x-1{,}5\ln(x-x^2)+18+12x\operatorname{ctg}4x-\frac{3(1-2x)}{2(1-x)}.$$

Выразим y':

$$y'=y\left(18\ln x+3\ln\sin 4x-1{,}5\ln(x-x^2)+18+12x\operatorname{ctg}4x-\frac{3(1-2x)}{2(1-x)}\right),$$

где $y=\left(\dfrac{x^6\cdot\sin 4x}{\sqrt{x-x^2}}\right)^{3x}$.

§ 7. Производные высших порядков функции одной переменной

1. Производные высших порядков.
2. Производные высших порядков от неявной функции.
3. Производные высших порядков от параметрически заданной функции.

1. Производные высших порядков

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка. Тогда $f'(x)$ является функцией переменной *x*. Если эта функция $f'(x)$ имеет производную в некоторой точке *x*, то эту производную $(f'(x))'$ называют *второй производной* функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$:

$$f''(x)=(f'(x))'.$$

Аналогично определяется третья производная: $f'''(x)=(f''(x))'$.

Определение. *Производной n-го порядка* называется первая производная от производной $(n-1)$-го порядка данной функции и обозначается $f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'$.

Определение. Производные порядка $n\geq 2$ называются *производными высших порядков*.

ПРИМЕРЫ.

1) Для функции $y = 2^x + x^3 + 2$ имеем $y' = 2^x \ln 2 + 3x^2$, $y'' = 2^x \ln^2 2 + 6x$, $y''' = 2^x \ln^3 2 + 6$, $y^{\mathrm{IV}} = 2^x \ln^4 2$, $y^{\mathrm{V}} = 2^x \ln^5 2$ и т.д.

2) Для $y = x^m$ имеем $y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)x^{m-n}$.

3) Для функции $y = \sin x$ имеем $y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4) Для функции $y = \cos x$ имеем $y^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5) $y = a^x$, $y^{(n)} = a^x \ln^n a$.

<u>Справедливы формулы:</u>

1) $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$.

2) формула Лейбница:

$$(u\cdot v)^{(n)} = u^{(n)}\cdot v + C_n^1\cdot u^{(n-1)}\cdot v' + C_n^2\cdot u^{(n-2)}\cdot v'' +$$
$$+ C_n^3\cdot u^{(n-3)}\cdot v''' + \ldots + u\cdot v^{(n)},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(k<n)$ – сочетания, где $C_n^0 = 1$ (по определению).

<u>Механический смысл второй производной:</u> вторая производная от пути по времени, как производная от скорости, есть скорость изменения скорости, то есть ускорение:

$$a = v' = s''(t).$$

2. Производные высших порядков от неявной функции

Производные высших порядков от неявной функции вычисляются последовательным дифференцированием обеих частей уравнения, задающего неявную функцию.

ПРИМЕР. Найти y''' от неявной функции $x^2 + y^2 = 4$.

Продифференцируем обе части уравнения:

$$2x + 2y\cdot y' = 0,$$

выразим y':

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Продифференцируем обе части полученного уравнения:

$$y'' = -\frac{x' \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{y - xy'}{y^2},$$

подставим найденную первую производную y':

$$y'' = -\frac{y - x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2},\ y'' = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2},\ y'' = -\frac{\frac{y^2 + x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3},$$

$$y'' = -\frac{4}{y^3} \text{ (так как } x^2 + y^2 = 4\text{)}.$$

Запишем вторую производную в виде $y'' = -4y^{-3}$. Тогда третья производная равна

$$y''' = -4 \cdot (-3) \cdot y^{-4} \cdot y',$$

$$y''' = 12 \cdot y^{-4} \cdot \left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{12x}{y^5}.$$

3. Производные высших порядков от параметрически заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Её первая производная, как известно, вычисляется по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Тогда её вторая производная, согласно определению, определяется следующим образом:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Аналогично находятся производные более высокого порядка:

$y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_x = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$ и т.д.

ПРИМЕР. Найти вторую производную от функции $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(2\sin t)'_t}{(2\cos t)'_t} = \frac{2\cos t}{-2\sin t} = -\operatorname{ctg} t,$$

$$y''_{xx} = (-\text{ctg}\, t)'_x = \frac{(-\text{ctg}\, t)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-2\sin t} = -\frac{1}{2\sin^3 t}.$$

§ 8. Дифференциал функции одной переменной

1. Понятие дифференциала функции.

2. Применение дифференциала для приближённых вычислений.

3. Дифференциалы высших порядков.

1. Понятие дифференциала функции

Определение. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то функция $f'(x)\Delta x$, зависящая от Δx, называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ и обозначается $df(x)$ или dy, то есть

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

В частности, если взять функцию $y = x$, то $dx = (x)'\Delta x = \Delta x$, поэтому

$$dy = f'(x)dx.$$

Таким образом, для получения дифференциала надо умножить производную функции на дифференциал независимой переменной dx.

С помощью определения дифференциала легко можно получить основные свойства дифференциала и таблицу дифференциалов.

Например,

1) $d(u+v) = du + dv$,

2) $dx^n = nx^{n-1}dx$,

3) $d(\text{tg}\, x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

Форма записи дифференциала не зависит от того, является ли переменная x независимой или же является функцией другой переменной. Это свойство дифференциала называют *инвариантностью* его формы.

2. Применение дифференциала для приближённых вычислений

Для малых $|\Delta x|$ имеет место

$$\Delta y \approx dy, \text{ то есть } \Delta y \approx y'\Delta x.$$

Полученное равенство широко применяется в вычислительной практике, так как дифференциал найти обычно значительно проще, чем приращение функции.

ПРИМЕР. Ребро куба длиной 20 см увеличено на 0,1 см. Определить величину изменения объёма куба.

Пусть x – ребро куба, тогда $V = x^3$ – объём куба. Применим формулу $\Delta V \approx V' \cdot \Delta x$, здесь $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, $V' = 3x^2$, тогда $\Delta V \approx 3x^2 \Delta x = 3 \cdot 20^2 \cdot 0{,}1 = 3 \cdot 400 \cdot 0{,}1 = 120$ (см^3).

С помощью замены приращения функции её дифференциалом решается задача нахождения приближённого значения функции $f(x+\Delta x)$ по её значению $f(x)$:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

Замечания.

1) Если $y = x^n$, то $(x+\Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x$.

В частности, при $x = 1$ получим $(1+\Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$, откуда имеем следующие приближённые формулы:

$$\frac{1}{1+\Delta x} \approx 1 - \Delta x, \qquad \frac{1}{1-\Delta x} \approx 1 + \Delta x;$$

$$\frac{1}{(1+\Delta x)^2} \approx 1 - 2\Delta x, \qquad \frac{1}{(1-\Delta x)^2} \approx 1 + 2\Delta x;$$

$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x, \qquad \sqrt{1-\Delta x} \approx 1 - \frac{1}{2}\Delta x;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}} \approx 1 - \frac{1}{2}\Delta x, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\Delta x}} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x.$$

2) Если $y = \sqrt[m]{x}$, $\quad m = 2,3,\ldots$, то $\sqrt[m]{x+\Delta x} \approx \sqrt[m]{x} + \frac{1}{m}\frac{\sqrt[m]{x}}{x}\Delta x$.

В частности, при $x = 1$ получим $\sqrt[m]{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{\Delta x}{m}$.

3) Если $y = \ln x$, то $\ln(x+\Delta x) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x}$.

В частности, при $x = 1$ получим $\ln(1+\Delta x) \approx \Delta x$.

ПРИМЕР. Вычислить $\sqrt{16{,}02}$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$, тогда $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Применим формулу $y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)\cdot \Delta x$

Запишем 16,02=16+0,02, то есть примем $x = 16$, $\Delta x = 0{,}02$.

Итак, получим

$$\sqrt{16{,}02} \approx y(16) + y'(16)\Delta x = \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}0{,}02 = 4 + \frac{1}{2\cdot 4}0{,}02 =$$

$$= 4 + \frac{1}{8}0{,}02 = 4 + 0{,}0025 = 4{,}0025.$$

По калькулятору $\sqrt{16{,}02}$=4,00249922.

3. Дифференциалы высших порядков

Определение. Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется *вторым дифференциалом* (или *дифференциалом второго порядка*) функции $f(x)$ в точке x и обозначается d^2y:

$$d^2y = d(dy).$$

Имеет место формула

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

Аналогично, дифференциал n-го порядка d^ny функции $y = f(x)$ определяется следующим образом:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)\cdot dx^n.$$

Замечания.

1) Второй и последующие дифференциалы не обладают свойством инвариантности формы.

2) Если для сложной функции $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ аргумент x является линейной функцией независимой переменной t, то есть $x = \varphi(t) = at + b$, то свойство инвариантности для дифференциалов высших порядков сохраняется.

§ 9. Правило Лопиталя

Теорема (правило Лопиталя). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют условиям:*

1) *они определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности* $\overset{0}{U}_a$ *точки* a ($a \in R$, $a = \infty$, $a = +\infty$ *или* $a = -\infty$), *причём* $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in \overset{0}{U}_a$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *или* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ (*здесь может быть также* $+\infty$ *или* $-\infty$);

3) *существует* (*конечный или бесконечный*) *предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Тогда существует предел отношения функций $f(x)$ *и* $g(x)$, *равный* k, *то есть*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Замечание. Если отношение производных опять представляет собой неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то можно снова применить правило Лопиталя, то есть перейти к отношению вторых производных и т.д.

ПРИМЕРЫ.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{\text{п.л.}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin 2x)'}{(\sin 3x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos 2x}{3\cos 3x} = \dfrac{2}{3}.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x + x^2}{x^3 + 1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{п.л.}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x + x^2)'}{(x^3 + 1)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 + 2x}{3x^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{п.л.}}{=}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2 + 2x)'}{(3x^2)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{6x} = \dfrac{2}{\infty} = 0.$

Правило Лопиталя позволяет раскрывать неопределённости типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Неопределённости других типов, например, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^{∞}), (0^0), (∞^0), можно с помощью алгебраических преобразований или логарифмирования привести к этим двум основным неопределённостям.

Рассмотрим эти случаи.

1) $(0\cdot\infty)$: пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, тогда запишем

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right) \text{ или } \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

ПРИМЕР.

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{П.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1\cdot x^2}{x\cdot 1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

2) $(\infty-\infty)$: пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, тогда рассмотрим

$$\lim_{x\to a} f(x)-g(x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

ПРИМЕР.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{П.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{П.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+(\cos x-x\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2-0}=0.$$

3) (1^∞), (0^0), (∞^0): каждая из этих неопределённостей имеет вид

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}.$$

Запишем $[f(x)]^{g(x)}=e^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$.

Тогда все указанные неопределённости будут приведены к неопределённостям вида $(0\cdot\infty)$.

ПРИМЕРЫ.

1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = (1^{\infty}) = \lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\left(\frac{0}{0}\right)} \overset{\text{П.Л.}}{=} e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 1}(-\frac{1}{x})} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = (\infty^0) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x^2)} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\ln(1+x^2)} = e^{(0\cdot\infty)} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}} = e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \overset{\text{П.Л.}}{=} e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x\cdot\frac{1}{1+x^2}}{1}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x}{1+x^2}} = e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \overset{\text{П.Л.}}{=} e^{\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2}{2x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1.$

§ 10. Приложение производной к исследованию функции одной переменной

1. Возрастание и убывание функции. Точки экстремума.
2. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке.
3. Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Точки перегиба.
4. Асимптоты графика функции.
5. Исследование функции и построение графика.

1. Возрастание и убывание функции. Точки экстремума

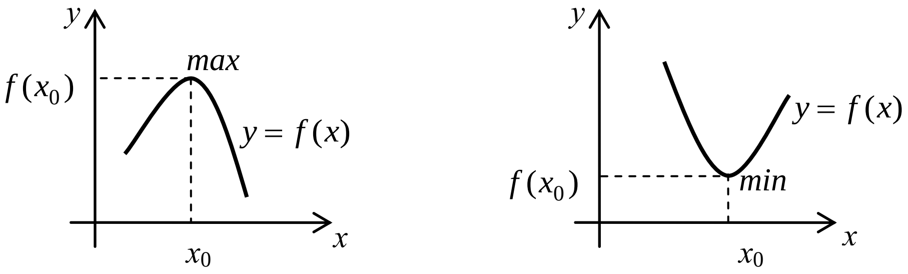
Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $< a;b >$ и дифференцируема на $(a;b)$.

Теорема 1 (признак постоянства функции на промежутке). *Функция* $f(x)$ *является постоянной на* $(a;b)$ *тогда и только тогда, когда выполнено равенство* $f'(x) = 0$ *на* $(a;b)$.

Теорема 2 (признак возрастания и убывания функции). *Функция* $f(x)$ *возрастает (убывает) на* $(a;b)$ *тогда и только тогда, когда* $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) *на* $(a;b)$.

Пусть $x_0 \in (a;b)$.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется *точкой максимума* (*точкой минимума*) функции $f(x)$, если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). Значение $f(x_0)$ в этом случае называется *максимумом* (*минимумом*) функции $f(x)$.



<u>Определение.</u> Точка максимума и точка минимума объединяются общим названием *точки экстремума*. Максимум и минимум функции называются *экстремумами* функции.

Понятие экстремума связано с определённой окрестностью из области определения функции, поэтому функция может иметь экстремум лишь во внутренних точках области определения.

Теорема 3 (необходимое условие экстремума). *Если x_0 является точкой экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$, то в этой точке производная равна нулю: $f'(x_0) = 0$.*

<u>Определение.</u> *Стационарными точками* функции $y = f(x)$ называют точки, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x - \textit{стационарная точка}.$$

<u>Определение.</u> *Критическими точками* функции $y = f(x)$ называют точки, в которых либо $f'(x) = 0$, либо $f'(x) = \infty$, либо производная не существует.

Теорема 4 (первый достаточный признак экстремума). *Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 является точкой экстремума. Если при этом знак $f'(x)$ меняется с «+» на «–», то x_0 является точкой максимума, если же знак $f'(x)$ меняется с «–» на «+», то x_0 является точкой минимума.*

Если производная не меняет знака при переходе через точку x_0, то точка x_0 не является точкой экстремума.

ПРИМЕР. Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$. Укажите количество точек экстремума функции, если график её производной имеет вид (см. рис.):

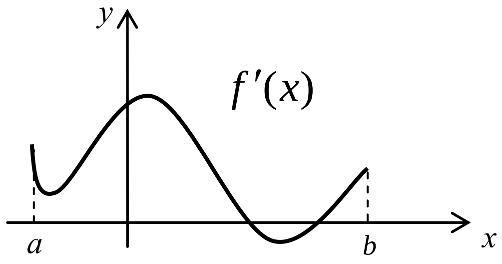


График производной $f'(x)$ пересекает ось Ox в двух точках, при переходе через которые меняет свой знак, следовательно, по первому достаточному признаку экстремума эти две точки являются точками экстремума.

Теорема 5 (второй достаточный признак экстремума). *Если в стационарной точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет конечную вторую производную, отличную от нуля, то точка x_0 есть точка экстремума: точка максимума при $f''(x_0) < 0$, точка минимума при $f''(x_0) > 0$.*

<u>Замечание.</u> При $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ следует использовать первый признак экстремума.

<u>Правило исследования функции на экстремум</u>:

1) найти $f'(x)$ и критические точки функции;

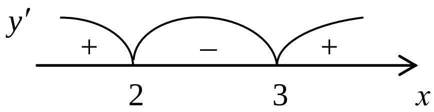
2) найденные критические точки исследовать по достаточным признакам экстремума функции.

ПРИМЕР. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1$.

Найдём производную функции: $y' = x^2 - 5x + 6$. Она определена на всей числовой прямой.

Критические точки найдём из уравнения $y' = 0$ или $x^2 - 5x + 6 = 0$. Решая квадратное уравнение, получим две критические точки: $x_1 = 2, x_2 = 3$.

Эти точки разбивают область определения функции y' на три интервала, в каждом из которых отметим знаки производной y':



Тогда функция возрастает ($y' > 0$) на интервале $(-\infty;2) \cup (3;+\infty)$ и убывает ($y' < 0$) на интервале $(2;3)$.

Согласно знакам производной, по первому достаточному признаку экстремума имеем:
$x = 2$ – точка максимума, $x = 3$ – точка минимума.

Применим второй достаточный признак экстремума. Для этого найдём вторую производную функции: $y'' = (x^2 - 5x + 6)' = 2x - 5$. Стационарными точками являются точки $x_1 = 2, x_2 = 3$. Так как $y''(2) = -1 < 0$, то $x = 2$ является точкой максимума; так как $y''(3) = 1 > 0$, то $x = 3$ – точка минимума.

Найдём экстремумы функции:
$y_{\max} = f(2) = \dfrac{17}{3}$, $y_{\min} = f(3) = \dfrac{11}{2}$.

2. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$:
1) найти критические точки функции на отрезке $[a;b]$;
2) вычислить значения функции в найденных критических точках;
3) вычислить значения функции на концах отрезка, то есть в точках $x = a$, $x = b$;
4) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

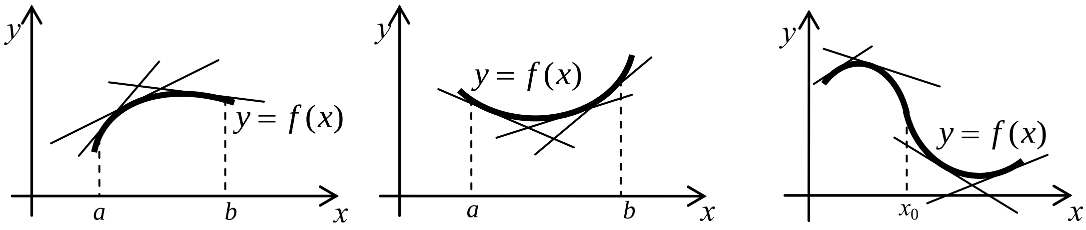
ПРИМЕР. Найти наибольшее значение функции $y = -2e^{x^2}$ на $[0;1]$.

Находим критические точки: $y' = -2e^{x^2} \cdot 2x$, $y' = 0$, откуда в силу $e^{x^2} \neq 0$ имеем $x = 0$. Рассмотрим $y(0) = -2e^0 = -2$, $y(1) = -2e^1 = -2e \approx -5{,}4$.

Таким образом, $y_{наиб} = y(0) = -2$.

3. Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Точки перегиба

Определение. График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* (*вогнутым*) на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже (выше) любой касательной на интервале $(a;b)$.



Определение. Точка графика функции, при переходе через которую выпуклость графика функции сменяется на вогнутость, или наоборот, называется *точкой перегиба*.

Теорема 1 (признак выпуклости и вогнутости графика функции). *График функции* $f(x)$ *является выпуклым* (*вогнутым*) *на* $(a;b)$ *тогда и только тогда, когда* $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) *на* $(a;b)$.

Теорема 2 (достаточный признак точки перегиба). *Если* $f''(x)$ *функции* $y = f(x)$ *обращается в точке* x_0 *в нуль и меняет знак при переходе через эту точку, то точка* $(x_0; f(x_0))$ *графика данной функции является точкой перегиба.*

ПРИМЕР. Исследовать на точки перегиба функцию $y = x^3 - 3x + 6$.

Найдём производные $y' = 3x^2 - 3$, $y'' = 6x$. Тогда $y'' = 0$ при $x = 0$.

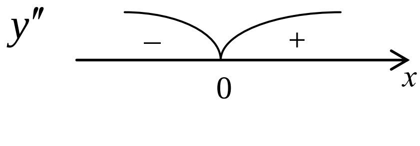


График функции является выпуклым ($y'' < 0$) на $(-\infty; 0)$ и вогнутым ($y'' > 0$) на $(0; +\infty)$.

Точка перегиба – это точка $(0;6)$.

4. Асимптоты графика функции

Определение. Прямая l называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки графика до прямой l

стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Возможны случаи вертикальной и наклонной асимптот.

1. *Вертикальные асимптоты*: $x = x_0$.

Для отыскания вертикальных асимптот достаточно найти те значения x_0, в которых хотя бы один из односторонних пределов функции равен ∞. Обычно это точки разрыва второго рода.

2. *Наклонные асимптоты*: $y = kx + b$, $k, b \in R$, где

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{1}$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx \right). \tag{2}$$

Если хотя бы один из пределов (1) или (2) не существует или равен ∞, то график функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ наклонных асимптот не имеет.

При $k = 0$ асимптота называется *горизонтальной*: $y = b$.

ПРИМЕР. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{(x+5)^2}{3x}$.

Так как $D(y) = R \setminus \{0\}$, то $x = 0$ – точка разрыва. Найдём односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to 0-0} y = \lim_{x\to 0-0} \frac{(x+5)^2}{3x} = \frac{(0-0+5)^2}{3(0-0)} = \frac{25}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+0} y = \lim_{x\to 0+0} \frac{(x+5)^2}{3x} = \frac{(0+0+5)^2}{3(0+0)} = \frac{25}{0} = +\infty,$$

значит, $x = 0$ – вертикальная асимптота.

Рассмотрим пределы

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+5)^2}{3x^2} = \frac{1}{3},$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{(x+5)^2}{3x} - \frac{1}{3}x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+5)^2 - x^2}{3x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{10x+25}{3x} = \frac{10}{3}.$$

Следовательно, $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{10}{3}$ – наклонная асимптота при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

5. Исследование функции и построение графика

Исследование функции целесообразно вести в определённой последовательности.

1) Найти область определения функции.

2) Найти точки пересечения графика с осями координат.

3) Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$).

4) Исследовать функцию на чётность и нечётность; на периодичность.

5) Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и выяснить характер разрывов.

6) Найти промежутки монотонности функции.

7) Найти экстремумы функции.

8) Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции. Найти точки перегиба.

9) Найти асимптоты графика функции.

Используя результаты исследования, построить график функции.

ПРИМЕР. Исследовать функцию $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2} - 5$ и построить её график.

1) Область определения $D(y) = R \setminus \{2\}$.

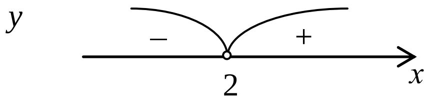
2) Точки пересечения графика с осями координат.

Если $y = 0$, то $\dfrac{(x+1)^2}{x-2} - 5 = 0$, то есть $\dfrac{(x+1)^2 - 5x + 10}{x-2} = 0$, $\dfrac{x^2 + 2x + 1 - 5x + 10}{x-2} = 0$, $\dfrac{x^2 - 3x + 11}{x-2} = 0$. Откуда имеем $x^2 - 3x + 11 = 0$, $x - 2 \neq 0$. Квадратное уравнение $x^2 - 3x + 11 = 0$ не имеет действительных корней ($D = 9 - 4 \cdot 11 = -35 < 0$), следовательно, график функции с осью Ox не пересекается.

Если $x = 0$, то $y = \dfrac{1}{-2} - 5 = -5{,}5$, то есть точка $A(0;-5{,}5)$ является точкой пересечения графика функции с осью Оy.

3) Интервалы знакопостоянства функции.

Решим неравенство $y > 0$ $(y < 0)$, то есть $\dfrac{(x+1)^2}{x-2} - 5 > 0$ $\left(\dfrac{(x+1)^2}{x-2} - 5 < 0\right)$ или $\dfrac{x^2 - 3x + 11}{x-2} > 0$ $\left(\dfrac{x^2 - 3x + 11}{x-2} < 0\right)$.



Получим $y < 0$ при $x \in (-\infty; 2)$, $y > 0$ при $x \in (2; +\infty)$.

4) Проверим функцию на чётность (должно выполняться равенство $y(-x) = y(x)$) и нечётность (должно выполняться равенство $y(-x) = -y(x)$):

$$y(-x) = \frac{(-x+1)^2}{-x-2} - 5 \neq y(x),\ y(-x) \neq -y(x),$$

следовательно, функция не является ни чётной, ни нечётной.

Функция непериодическая.

5) Функция непрерывна на области определения $D(y)$, при этом $x = 2$ является точкой разрыва:

$$\lim_{x \to 2-0} y = \lim_{x \to 2-0}\left(\frac{(x+1)^2}{x-2} - 5\right) = \frac{(2-0+1)^2}{2-0-2} - 5 = \frac{9}{-0} - 5 = -\infty - 5 = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 2+0} y = \lim_{x \to 2+0}\left(\frac{(x+1)^2}{x-2} - 5\right) = \frac{(2+0+1)^2}{2+0-2} - 5 = \frac{9}{0} - 5 = +\infty - 5 = +\infty.$$

Таким образом, $x = 2$ – точка разрыва второго рода.

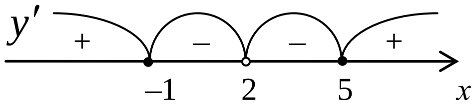
6) Для определения промежутков монотонности функции найдём её производную:

$$y' = \left(\frac{(x+1)^2}{x-2} - 5\right)' = \frac{2(x+1)(x-2) - (x+1)^2}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)(2x-4-x-1)}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

Тогда $y'(x) = 0$ при $x_1 = -1, x_2 = 5$, причём $y'(x) = \infty$ при $x_3 = 2$.

Следовательно, $x_1 = -1, x_2 = 5$, $x_3 = 2$ – это критические точки функции. Они разбивают область определения производной $y'(x)$ на 4 интервала, в каждом из которых отметим её знаки:



Согласно признаку возрастания и убывания функции, данная функция y возрастает на интервале $(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$, так как $y'(x)>0$; функция убывает на интервале $(-1;2)\cup(2;5)$, так как $y'(x)<0$.

7) Согласно первому достаточному признаку экстремума функции получим:

$x=-1$ – точка максимума, $y_{\max}=y(-1)=-5$ – максимум функции;

$x=5$ – точка минимума, $y_{\min}=y(5)=7$ – минимум функции.

8) Найдём вторую производную:

$$y''=(y')'=\left(\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x-5)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}=$$

$$=\frac{2x^2-8x+8-2x^2+8x+10}{(x-2)^3}=\frac{18}{(x-2)^3}.$$

Отметим знаки второй производной:

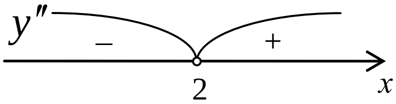


График функции выпуклый ($y''<0$) на интервале $(-\infty;2)$; график функции вогнутый ($y''>0$) на интервале $(2;+\infty)$.

Вторая производная $y''(x)$ меняет свой знак при переходе через точку $x=2$, но в этой точке функция не определена, следовательно, точек перегиба нет.

9) Из пункта 5) следует, что $x=2$ – вертикальная асимптота.

Для наклонной асимптоты вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+11}{(x-2)\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+11}{x^2-2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{П.Л.}}{=}$$

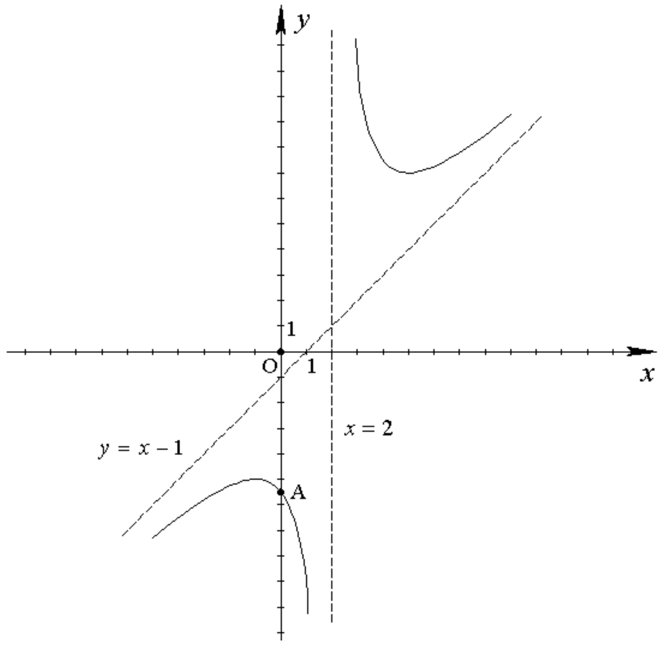
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{2x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{П.Л.}}{=}\frac{2}{2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+11}{x-2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+11-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+11}{x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{П.Л.}}{=}-1.$$

Следовательно, $y = x - 1$ – наклонная асимптота.

По результатам исследования функции построим график функции $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2} - 5$.



§ 11. Формула Тейлора для функции одной переменной

Теорема. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена на интервале* $(a;b)$ *и имеет производные до* $(n+1)$*-го порядка включительно. Тогда для* $\forall x \in (a;b)$ *и фиксированной точки* $x_0 \in (a;b)$ *найдётся такая точка* $c \in [x_0; x]$*, что справедлива формула:*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \quad (1)$$

Формула (1) называется *формулой Тейлора*, а последнее слагаемое этой формулы называют *остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа*:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

При $x_0 = 0$ формулу Тейлора называют *формулой Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (2)$$

Запишем разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена (2), отбросив остаточный член:

1) $f(x) = e^x$:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!};$$

2) $f(x) = a^x$:

$$a^x \approx 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n;$$

3) $f(x) = \sin x$:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in R;$$

4) $f(x) = \cos x$:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in R;$$

5) $f(x) = \ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \ x \in (-1;1];$$

6) $f(x) = (1+x)^m$:

$$(1+x)^m \approx 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n, \ x \in (-1;1).$$

Формула Тейлора является основой приближённых вычислений. Она находит применение также при вычислении пределов.

ПРИМЕР. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ (в приближении до третьего порядка).

Запишем разложение по формуле Маклорена следующих функций (ограничимся приближением до третьего порядка):

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \qquad e^{-x} \approx 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}, \qquad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}.$$

Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)-2x}{x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{6}}=\frac{6}{3}=2.$$

§ 12. Функции нескольких переменных

1. Определение функции нескольких переменных.
2. График функции двух переменных. Линии уровня.
3. Частные производные функции нескольких переменных.
4. Производная сложной функции нескольких переменных.
5. Дифференцирование неявной функции нескольких переменных.
6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
7. Производная по данному направлению. Градиент.
8. Частные производные высших порядков функции нескольких переменных.
9. Дифференциал функции нескольких переменных.

Понятие функции одной переменной не охватывает все зависимости, существующие в природе. Поэтому естественно расширить понятие функциональной зависимости и ввести понятие функции нескольких переменных.

Ограничимся рассмотрением функции двух переменных, так как все важнейшие факты теории функции нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных. Распространение определений и полученных результатов на функции нескольких переменных представляет собой, как правило, лишь технические трудности.

1. Определение функции нескольких переменных

Определение. Переменная z называется *функцией независимых переменных* x *и* y, если любой паре (x, y) ставится в соответствие по некоторому правилу или закону единственное значение z.

Обозначение: $z = f(x, y)$.

При этом множество G всех пар значений x и y, которые могут принимать переменные x и y, называется *областью определения* функции z.

Переменные x и y называются *аргументами* функции z.

Множество всех значений, принимаемых z в области определения, называется *областью значений* функции z.

Областью определения функции двух переменных может быть вся плоскость Oxy или её часть.

Аналогично, областью определения функции трёх переменных является всё пространство $Oxyz$ или его часть.

Способы задания функции нескольких переменных, как и в случае функции одно переменной, различны. Наиболее важным способом является аналитический способ задания, когда функция задаётся с помощью формулы.

2. График функции двух переменных. Линии уровня

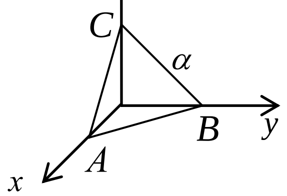
Определение. Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$, определённой в некоторой области G, называется множество точек (x, y, z) пространства, у которых $(x, y) \in G$ и $z = f(x, y)$.

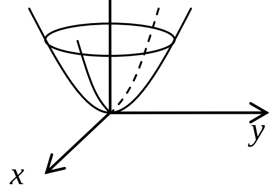
Геометрически графиком функции $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность.

ПРИМЕРЫ.

1) Графиком функции $z = 1 - x - y$ является плоскость:
$\alpha : x + y + z - 1 = 0,\ \alpha \equiv (ABC)$.

2) Графиком функции $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ является эллиптический параболоид.





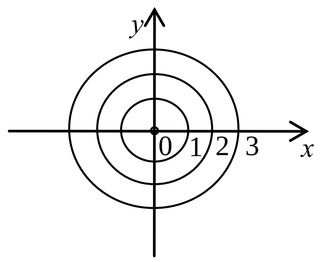
Однако построение графиков функции двух переменных в большинстве случаев представляет значительные трудности. В таких случаях удобно геометрически описывать функции двух переменных, не выходя в трёхмерное пространство. Средством такого описания являются линии уровня.

<u>Определение.</u> *Линией уровня* функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек (x, y), для которых функция сохраняет какое-либо постоянное значение, то есть $f(x, y) = c$, $c = const$, $c \geq 0$.

Придавая c различные значения, получим целое семейство линий уровня. Это семейство наглядно описывает функцию $z = f(x, y)$.

ПРИМЕР. Построим линии уровня поверхности $z = x^2 + y^2$.

Пересечём поверхность $z = x^2 + y^2$ плоскостью $z = c$, $c \geq 0$. Придавая c различные значения $(c = 0; 1; 2; \ldots)$, получим семейство линий уровня, представляющих собой окружности:



при $c = 0$ имеем $x^2 + y^2 = 0$ – точка $O(0; 0)$;

при $c = 1$ имеем $x^2 + y^2 = 1$ – окружность $\omega_1(O; r = 1)$;

при $c = 2$ имеем $x^2 + y^2 = 2$ – окружность $\omega_2(O; r = \sqrt{2})$ и т.д.

3. Частные производные функции нескольких переменных

<u>Определение.</u> *Частной производной* функции нескольких переменных по какой-либо переменной называется обычная производная данной функции по этой переменной, считая при этом другие переменные фиксированными (постоянными).

В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ частные производные обозначаются следующим образом:

$$z'_x = f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad z'_y = f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Символы $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ как дроби трактовать нельзя.

Из определения частных производных следует, что правила их вычисления такие же, что и для функции одной переменной, при этом следует лишь помнить, по какой переменной ведётся дифференцирование.

ПРИМЕРЫ.

1) Частные производные функции двух переменных $z = x^5 y^2 + \sin 3x - 4^y + 6$ имеют вид:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 y^2 + 3\cos 3x,$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x^5 \cdot 2y - 4^y \ln 4.$$

2) Частные производные функции трёх переменных $u = e^{4x} + 3y^7 - \cos\sqrt{z}$ в точке $M(1;1;4)$ равны:

$u'_x = 4e^{4x}$, $u'_x(M) = 4e^{4\cdot 0} = 4$;

$u'_y = 21y^6$, $u'_y(M) = 21 \cdot 1^6 = 21$;

$u'_z = \sin\sqrt{z} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$, $u'_z(M) = \sin\sqrt{4} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}\sin 2$.

4. Производная сложной функции нескольких переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, то есть функция z является функцией одной переменной t. Тогда *производная сложной функции одной независимой переменной* есть

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \text{ или } z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t.$$

Рассмотрим функцию трёх переменных $u = f(x, y, z)$, где $x = x(t, v)$, $y = y(t, v)$, $z = z(t, v)$, то есть функция u есть функция двух переменных t и v. Тогда *производная сложной функции двух независимых переменных* есть

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \text{ или } u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \text{ или } u'_v = u'_x \cdot x'_v + u'_y \cdot y'_v + u'_z \cdot z'_v.$$

ПРИМЕРЫ.

1) Для функции $z = e^{x^2 + y^2}$, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x \cdot (-a\sin t) + e^{x^2+y^2} \cdot 2y \cdot a\cos t.$$

2) Для функции $z=\ln\left(x^2-y^2\right),\ y=e^x$ имеем

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x+\frac{1}{x^2-y^2}\cdot(-2y)\cdot e^x.$$

5. Дифференцирование неявной функции нескольких переменных

Рассмотрим уравнение $F(x,y,z)=0$. Оно определяет z как неявную функцию $z=z(x,y)$ независимых переменных x и y. Тогда *частные производные неявной функции* z вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z},\ F'_z\neq 0.$$

ПРИМЕР. Найти частные производные неявной функции z, если она задана уравнением $x^2+3y^5+4z=2xyz-1$.

Приведём данное уравнение к виду $F(x,y,z)=0$:

$x^2+3y^5+4z-2xyz+1=0$. Тогда получим

$$F'_x=2x-2yz,\qquad F'_y=15y^4-2xz,\qquad F'_z=4-2xy.$$

Таким образом, соберём частные производные неявной функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2x-2yz}{4-2xy}=\frac{yz-x}{2-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{15y^4-2xz}{4-2xy}.$$

6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Определение. *Касательной плоскостью* к поверхности в точке M_0 называется плоскость, в которой лежат все касательные, проведённые в точке M_0 к всевозможным кривым, лежащим на поверхности и проходящими через точку M_0.

Определение. *Нормалью* к поверхности в точке M_0 называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости к поверхности в точке M_0.

Возможны два способа задания касательной плоскости и нормали к поверхности в зависимости от способа задания самой поверхности.

1) Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, тогда в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеем
уравнение касательной плоскости:
$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + z'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0),$$
уравнение нормали: $\dfrac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$.

2) Пусть поверхность задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, тогда в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеем
уравнение касательной плоскости:
$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0,$$
уравнение нормали: $\dfrac{(x - x_0)}{F'_x(M_0)} = \dfrac{(y - y_0)}{F'_y(M_0)} = \dfrac{(z - z_0)}{F'_z(M_0)}$.

ПРИМЕР. Дана поверхность $z = x^2 + 3y^2$. Составим уравнение касательной плоскости и нормали к данной поверхности в точке $M(2;1;7)$.

Так как поверхность задана явным уравнением, то воспользуемся уравнениями из пункта 1). Для этого найдём частные производные функции, задающей поверхность, и вычислим их в точке $M(2;1;7)$:
$$z'_x = 2x,\ z'_x(M) = 2 \cdot 2 = 4; \qquad z'_y = 6y,\ z'_y(M) = 6 \cdot 1 = 6.$$

Тогда касательная плоскость имеет уравнение:
$z - 7 = 4(x - 2) + 6(y - 1)$, то есть $4x + 6y - z - 7 = 0$.

Нормаль в точке $M(2;1;7)$ имеет уравнение:
$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 1}{6} = \frac{z - 7}{-1}.$$

7. Производная по данному направлению. Градиент

Частные производные функции $u = f(x, y, z) = f(M)$ выражают «скорость изменения» функции по направлениям координатных осей. Например, u'_x – скорость изменения функции u по оси Ox.

Для того чтобы определить скорость изменения функции вдоль произвольного направления вычисляют производную по направлению.

Теорема. *Пусть вектор* $\vec{l}$ *образует с осями координат углы* $\alpha = \angle(\vec{l}, Ox)$, $\beta = \angle(\vec{l}, Oy)$, $\gamma = \angle(\vec{l}, Oz)$. *Тогда производная от функции* $u = f(x, y, z)$ *по направлению вектора* $\vec{l}$ *равна*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$\text{или } \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta + u'_z \cos\gamma .$$

<u>Физический смысл производной по направлению:</u> производная по направлению $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$ характеризует скорость изменения функции $u = f(x, y, z)$ в направлении вектора $\vec{l}$, при этом абсолютная величина производной $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$ по направлению $\vec{l}$ определяет величину скорости, а знак производной – характер изменения функции u (увеличение или уменьшение).

ПРИМЕР. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ по направлению вектора $\vec{l}$ в точке $M_0(1;1)$, если $\angle(\vec{l}, Ox) = \frac{\pi}{3}$.

Вычислим частные производные данной функции:
$z'_x = 2x$, $\quad z'_y = -2y$.

Так как $\alpha = \angle(\vec{l}, Ox) = \frac{\pi}{3}$, то $\beta = \angle(\vec{l}, Oy) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, тогда $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом, получим:
$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta = 2x \cdot \frac{1}{2} - 2y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = x - \sqrt{3}y$, то есть

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}(M_0) = 1 - \sqrt{3} .$$

<u>Определение.</u> *Градиентом* функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\vec{k}$$

или $\operatorname{grad} u = u'_x(M_0)\vec{i} + u'_y(M_0)\vec{j} + u'_z(M_0)\vec{k}$.

Физический смысл градиента: вектор $\operatorname{grad} u(M_0)$ показывает направление наибольшего изменения функции $u = f(x, y, z)$ в данной точке M_0, при этом модуль вектора $\operatorname{grad} u$ есть скорость этого изменения.

ПРИМЕР. Найти $\operatorname{grad} z(M_0)$, если $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M_0(3;4)$.

Найдём $z'_x = \dfrac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x$, $z'_y = \dfrac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y$. Вычислим их в точке $M_0(3;4)$:

$$z'_x(M_0) = \frac{1}{3^2 + 4^2} \cdot 2 \cdot 3 = \frac{6}{25}, \qquad z'_y(M_0) = \frac{1}{3^2 + 4^2} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{8}{25}.$$

Согласно определению, имеем $\operatorname{grad} z = z'_x(M_0)\vec{i} + z'_y(M_0)\vec{j}$, а значит, $\operatorname{grad} z(M_0) = \dfrac{6}{25}\vec{i} + \dfrac{8}{25}\vec{j}$.

8. Частные производные высших порядков функции нескольких переменных

Частные производные функции нескольких переменных сами являются функциями этих переменных и могут иметь частные производные. Для исходной функции эти последние производные будут *частными производными второго порядка*.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Её частные производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \qquad z''_{xy} = (z'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \qquad z''_{yy} = (z'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Аналогично определяются частные производные третьего, четвёртого и старших порядков.

Определение. Частные производные z''_{xy} и z''_{yx}, отличающиеся порядком дифференцирования, называют *смешанными частными производными второго порядка*.

Определение. Частные производные высших порядков, взятые по различным переменным, называются *смешанными частными производными*.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные частные производные одного порядка, отличающиеся только порядком дифференцирования, равны.*

Например, для функции $z = f(x, y)$ имеем $z''_{xy} = z''_{yx}$, $z'''_{xxy} = z'''_{xyx} = z'''_{yxx}$ и т. д.

ПРИМЕР. Найти частные производные высших порядков функции $u = x^4 y^3 z^2$:

$u'_x = 4x^3y^3z^2$, $u'_y = 3x^4y^2z^2$, $u'_z = 2x^4y^3z$;

$u''_{xx} = (u'_x)'_x = 12x^2y^3z^2$, $u''_{xy} = (u'_x)'_y = 12x^3y^2z^2$,

$u''_{xz} = (u'_x)'_z = 8x^3y^3z$, $u'''_{xyz} = (u''_{xy})'_z = 24x^3y^2z$,

$u''_{yy} = (u'_y)'_y = 6x^4yz^2$, $u'''_{yyy} = (u''_{yy})'_y = 6x^4z^2$,

$u''_{yz} = (u'_y)'_z = 6x^4y^2z$, $u'''_{yzx} = (u''_{yz})'_x = 24x^3y^2z$,

$u''_{zz} = (u'_z)'_z = 2x^4y^3$, $u'''_{zzz} = (u''_{zz})'_z = 0$, и т.д.

Заметим, что $u'''_{xyz} = u'''_{yzx}$.

9. Дифференциал функции нескольких переменных

Определение. *Полным дифференциалом* функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеющей непрерывные частные производные первого порядка, называют выражение:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n.$$

Заметим, что du есть функция от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \text{ или } dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Определение. *Дифференциалом второго порядка* d^2u называется полный дифференциал от первого полного дифференциала:

$$d^2u = d(du).$$

При этом требуется существование непрерывных частных производных второго порядка.

Вычисляется d^2u по формуле:

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 u .$$

Здесь сначала раскрывается квадрат выражения в скобках; затем числители полученных дробей умножаются на u.

Формула d^2u обобщается на случай *дифференциала m-го порядка*:

$$d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m u .$$

ПРИМЕР. Найти полный дифференциал dz и дифференциал второго порядка d^2z функции $z = x^5 \sin y$.

Найдём частные производные первого порядка:

$z'_x = 5x^4 \sin y$, $\qquad z'_y = x^5 \cos y$.

Тогда полный дифференциал имеет вид:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = 5x^4 \sin y dx + x^5 \cos y dy .$$

Распишем формулу для дифференциала второго порядка:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = z''_{xx} dx^2 + 2 z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2 .$$

Найдём частные производные второго порядка:

$z''_{xx} = (z'_x)'_x = 20x^3 \sin y$, $\qquad z''_{xy} = (z'_x)'_y = 5x^4 \cos y$,

$z''_{yy} = (z'_y)'_y = -x^5 \sin y$.

Тогда $d^2 z = 20x^3 \sin y dx^2 + 10x^4 \cos y dx dy - x^5 \sin y dy^2$.

§ 13. Экстремум функции двух переменных

1. Необходимое условие экстремума функции двух переменных.
2. Достаточное условие экстремума функции двух переменных.
3. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных.

1. Необходимое условие экстремума функции двух переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$.

Определение. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой *максимума* (*минимума*) функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности и отличных от M_0 выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \ \big(f(x_0, y_0) < f(x, y)\big).$$

Определение. Значение функции в точке максимума (минимума) называется *максимумом* (*минимумом*) функции.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремумами* этой функции. Максимум и минимум функции называются её *экстремумами*.

Отметим, что экстремумы имеют *локальный* (местный) характер: значение функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ сравнивается с её значениями в точках, достаточно близких к $M_0(x_0, y_0)$.

Теорема (необходимое условие экстремума). *Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум, то её частные производные в этой точке равны нулю:*

$$z'_x(x_0, y_0) = 0, \ z'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Определение. *Стационарными точками* функции $z = f(x, y)$ называют точки, в которых частные производные первого порядка данной функции равны нулю, то есть их координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Таким образом, стационарные точки – это точки, в которых данная функция может иметь экстремум.

2. Достаточное условие экстремума функции двух переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$.

Теорема (достаточное условие экстремума). *Пусть функция* $z = f(x, y)$ *непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядков в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0, y_0)$ *и удовлетворяет условиям*

$$z'_x(x_0, y_0) = 0,\ z'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Обозначим

$$A = z''_{xx}(x_0, y_0), \qquad B = z''_{xy}(x_0, y_0),$$

$$C = z''_{yy}(x_0, y_0), \qquad D = AC - B^2.$$

1) *Если* $D > 0$*, то в точке* M_0 *функция* $z = f(x, y)$ *имеет экстремум, причём при* $A < 0$ *максимум, при* $A > 0$ *минимум.*

2) *Если* $D < 0$*, то в точке* M_0 *функция* $z = f(x, y)$ *экстремума не имеет.*

<u>Замечание.</u> В случае $D = 0$ функция может иметь экстремум, а может не иметь. Этот случай называется неопределённым и требует дополнительного исследования.

ПРИМЕР. Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Найдём стационарные точки функции. Для этого запишем её частные производные первого порядка:

$$z'_x = 3x^2 - 3y,\ z'_y = 3y^2 - 3x.$$

Тогда стационарные точки определятся из системы:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \text{то есть} \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2, \\ x(x^3 - 1) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = 1; \end{array}\right. \end{cases}$$

значит, $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$ – стационарные точки.

Найдём частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = 6x,\ z''_{xy} = -3,\ z''_{yy} = 6y.$$

Вычислим значения частных производных второго порядка в стационарных точках и применим достаточное условие экстремума функции двух переменных.

Для точки $M_1(0;0)$:

$A = z''_{xx}(M_1) = 6 \cdot 0 = 0$, $\qquad B = z''_{xy}(M_1) = -3$,

$C = z''_{yy}(M_1) = 6 \cdot 0 = 0$, $\qquad D = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$.

Следовательно, в точке M_1 экстремума нет.

Для точки $M_2(1;1)$:

$A = z''_{xx}(M_2) = 6 \cdot 1 = 6$, $\qquad B = z''_{xy}(M_2) = -3$,

$C = z''_{yy}(M_2) = 6 \cdot 1 = 6$, $\qquad D = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27 > 0$.

Следовательно, в точке M_2 есть экстремум, причём в силу $A = 6 > 0$ точка M_2 является точкой минимума. Сам локальный минимум равен $z_{\min} = z(M_2) = z(1;1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$.

3. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных

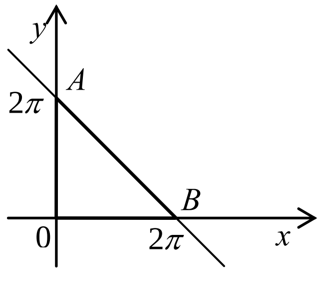
Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в области *D*:

1) найти все внутренние стационарные точки и вычислить значение функции в этих точках;

2) вычислить значение функции в граничных точках области *D*;

3) сравнив найденные значения функции, определить наибольшее и наименьшее значения функции во всей области *D*.

ПРИМЕР. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2\pi$.



Найдём частные производные функции:

$$z'_x = \cos x - \cos(x + y),$$

$$z'_y = \cos y - \cos(x + y).$$

Тогда стационарные точки функции определятся из системы:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \text{то есть} \begin{cases} \cos x - \cos(x+y) = 0, \\ \cos y - \cos(x+y) = 0. \end{cases}$$

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} \cos x = \cos(x+y), \\ \cos y = \cos(x+y); \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = \cos(x+y), \\ \cos x = \cos y; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = \cos(x+y), \\ x = y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \cos 2x, \\ x = y; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x - \cos 2x = 0, \\ x = y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\sin\dfrac{x+2x}{2}\sin\dfrac{x-2x}{2} = 0, \\ x = y; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{x}{2} = 0, \\ x = y. \end{cases}$$

В силу первого уравнения системы, данная система равносильна совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\dfrac{3}{2}x\right) = 0,\ x = y, \\ \sin\dfrac{x}{2} = 0,\ x = y; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{2}x = \pi k,\ x = y, \\ \dfrac{x}{2} = \pi k,\ x = y, \quad (k \in Z); \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3}\pi k,\ y = \dfrac{2}{3}\pi k, \\ x = 2\pi k,\ y = 2\pi k, \quad (k \in Z). \end{array}\right.$$

Так как мы находим наибольшее и наименьшее значения функции в ΔOAB, то берём только точки $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{2}{3}\pi$, $y_2 = \dfrac{2}{3}\pi$. Итак, $M_1(0;0)$ и $M_2\left(\dfrac{2}{3}\pi; \dfrac{2}{3}\pi\right)$ – стационарные точки функции в ΔOAB.

Вычислим значение функции в стационарных точках:

$z(M_1) = 0$,

$$z(M_2)=\sin\frac{2}{3}\pi+\sin\frac{2}{3}\pi-\sin\frac{4}{3}\pi=2\sin\frac{2}{3}\pi-\sin\frac{4}{3}\pi=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=3\sin\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Вычислим значение функции на границе ΔOAB:
при $x=0$ имеем $z=\sin 0+\sin y-\sin(0+y)=\sin y-\sin y=0$,
при $y=0$ имеем $z=\sin x+\sin 0-\sin(x+0)=\sin x-\sin x=0$,
при $x+y=2\pi$ имеем
$z=\sin x+\sin(2\pi-x)-\sin(x+2\pi-x)=\sin x-\sin x-0=0$.

Итак, $z_{наиб}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ в точке $M_2\left(\dfrac{2}{3}\pi;\dfrac{2}{3}\pi\right)$, $z_{наим}=0$ в любой точке границы области (ΔOAB).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Баврин, И. И.* Высшая математика / И. И. Баврин. – 2-е изд., доп. – М. : Владос, 2004. – 560 с.
2. *Берман, Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. Решение типичных и трудных задач / Г. Н. Берман. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2007. – 608 с.
3. *Выгодский, М. Я.* Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М. : Астрель, 2006. – 991 с.
4. *Гусак А. А.* Высшая математика : [в 2 т.]. Т. 1 / А. А. Гусак. – 3-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – 543 с.
5. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа : [учеб. для мат. спец. ун-тов] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 6-е изд., испр., – М : Наука, 1989. – 623 с.
6. *Копылов, В. И.* Курс лекций по высшей математике / В. И. Копылов. – Чебоксары : ЧИЭиМ СПбГПУ, 2007. – 341 с.
7. *Кудрявцев, Л. Д.* Краткий курс математического анализа [Электронный ресурс] : [учеб. для физ.-мат. и инж.-физ. спец. вузов]. Т. 1 : Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. / Л. Д. Кудрявцев. – Изд. 3-е. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 400 с. – Режим доступа: http://ibooks.ru/.
8. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – 9-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2008. – 288 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Григорьева Наталья Александровна
Матвеева Анастасия Михайловна

Курс лекций
по математическому анализу

для студентов, обучающихся по направлению подготовки 262000 Технология изделий лёгкой промышленности

ЧАСТЬ 1

Компьютерная вёрстка Матвеевой А. М.

Подписано в печать 31.10.2013. Формат $60 \times 84/16$.
Бумага писчая. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 5,1. Тираж 100 экз. Заказ №

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в отделе полиграфии
ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38