

Контрольная работа № 1 по математике

(направление подготовки

23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»)

Темы: пределы, дифференциальное исчисление, линейная алгебра

Задание 1. Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталья.

Варианты:

1. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + \sqrt{x}}{\ln x + 5}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6 + 4}{3 - x^7}$, в) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^4 - 4}$, г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7 - \sqrt{x^2 + 49}}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3}{\sin 2x}$, е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 2}{3x - 1} \right)^{2x - 5}$
2. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 7x + x}{3 + x}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 5}{x^5 - 1}$, в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3}$, г) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{-2x + 3} - 3}{x + 3}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{3x^2}$, е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 5}{x + 1} \right)^{9x + 3}$
3. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 + 3^x}{1 - x}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^8 + x}{3x + 1}$, в) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{2x^2 + 7x - 4}$, г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x^5 + 1}}{10x}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\arcsin 3x}$, е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 6}{5x + 2} \right)^{3x - 7}$
4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 5}{10 + x}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + x^2}{x^{10} + 1}$, в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 3}$, г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{2x + 2} - 2}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{7x^2}$, е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x + 1}{10x + 4} \right)^{7x - 1}$
5. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1 + 6^x}{2x + 7}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + x}{1 - x^3}$, в) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{x^4 - 9}{x^2 - 3}$, г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{\sqrt{64 + 5x} - 8}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\arcsin 6x}$, е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 4}{2x + 1} \right)^{1 - 3x}$
6. а) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x}{3x - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x}{x + 7}$, в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$, г) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{-3x - 2} - 2}{x + 2}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 7x}$, е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x - 2} \right)^{4x + 1}$
7. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} + 1}{3x + x^2 - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 5}{x^6 + 3x}$, в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x - 5}$, г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} - \frac{1}{2}}{x}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 9x}{3x^3}$, е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x + 7}{6x - 3} \right)^{x - 5}$
8. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 5}{3^x - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 2}{3 - x^5}$, в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 + 3x - 18}$, г) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{5x + 1} - 4}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\operatorname{tg} 3x}$, е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x - 2} \right)^{4x + 5}$

$$9. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 10x + 2}{\sin x - 1}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x}{1 - x^4}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{4x^2 - 12x}, \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{1 - \sqrt{x + x^2 + 1}},$$

$$\text{ д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\arcsin 10x}, \text{ е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 5} \right)^{3x + 8}$$

$$10. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7^{2x} - 49}{3x}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{10} + 3x}{x - 1}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 6x - 7}{x - 7}, \text{ г) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \sqrt{x + 2}}{x + 1},$$

$$\text{ д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{11x^2}{\operatorname{tg} 3x}, \text{ е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7 + 2x}{1 + 2x} \right)^{x + 1}$$

Задание 2. Найти производную y' сложной функции $y = f(x)$.

Варианты:

$$1. y = \frac{10x + 3}{\operatorname{tg}(e^{6x})} + \sqrt{x^3 - 2x + 1}$$

$$2. y = \sin \frac{8x - x^7}{2} - \arccos 3x - x \cdot 5^{\ln x}$$

$$3. y = (x^{12} - 4) \cdot \operatorname{ctg}(3x) + \frac{2x}{\pi} - \cos(2x + 1)$$

$$4. y = \frac{9 + 2x}{x^2 - 4x^5} + e^{3x + \operatorname{tg} 2x - \ln 4}$$

$$5. y = 4^{\arcsin x} + \frac{x^4 - 3 \operatorname{tg}(x - 9)}{2x - \sqrt[3]{x}}$$

$$6. y = (2 \cos 7x + 3 \ln x) \cdot 6^x - \operatorname{ctg}(-x) + x^3 - 2$$

$$7. y = e^{4-x} \cdot \sqrt{x^5 + 1} - \log_2(5x + 11) + \sin 7x$$

$$8. y = \frac{e^x + e^{-5x}}{2x} + \sin(x^3 + \sqrt{x} - 4)$$

$$9. y = \frac{1 - 2x^4}{x^3 - x + \pi} + \cos(2 + 3^{x-1} + \sqrt{x}) - 7$$

$$10. y = \operatorname{tg} 6x - \left(3x^9 - x + \frac{1}{5x} \right) \cdot \ln x^3$$

Задание 3. Найти производную y'_x параметрически заданной функции $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Варианты:

$$1. x = 2 \sin^4 t + t^3, \quad y = -t + \cos 3t$$

$$2. x = \frac{1 + t^2}{t}, \quad y = \operatorname{arctg} 5t + e^t$$

$$3. x = t^2 - \frac{1}{t}, \quad y = t^4 + \ln 2t$$

$$4. x = \cos t - 4t, \quad y = \sin^3 2t + t^2$$

$$5. x = 7(t - \sin^5 t), \quad y = 1 - \cos t$$

$$6. x = \frac{2}{t} - 3t^7, \quad y = \sqrt{t} - t$$

$$7. x = 2t^3 - 8t, \quad y = \sqrt{t^3} - t^2$$

$$8. x = 5t + \cos^2(t - 4), \quad y = 1 + 5\sqrt{t}$$

$$9. x = 3 \sin^3 2t, \quad y = 3t^2 + \sqrt{2}$$

$$10. x = \frac{1 - 3t^2}{t^2}, \quad y = \arcsin 8t - \pi$$

Задание 4. Найти производную y' неявно заданной функции $F(x; y) = 0$.

Варианты:

$$1. 5 \operatorname{arctg} 2x + \ln 4y + xy - 1 = 0$$

$$2. \arcsin 3x + \ln y = xy^{10} - 5$$

$$3. 5x^2 y^6 - 3 \sin 4y + \frac{1}{x} = 2y$$

$$4. 4^{5y} + 2 \ln x - x^4 \cdot \sin 5y = -3$$

$$5. 3x \cdot \ln 6y + 7^{2x} - \sqrt{y} = x$$

$$6. \cos 7x + 2x \cdot \sqrt{y^3} + \frac{1}{y} = 0$$

$$7. 3x + \frac{5}{y} = \sin 6x \cdot \cos 5y$$

$$8. 3x - \sqrt{y} + x^9 \cdot y^3 = \sin(4 + y)$$

$$9. (2x + 3)^4 + 7y + x^6 y^7 = 0$$

$$10. 8x^4 \cdot \operatorname{ctg} y - 3^x + y^5 = \arccos 2x$$

Задание 5. Найти пределы из задания 1 (пункты б), в) и д)) по правилу Лопиталья.

Задание 6. Найти промежутки возрастания и убывания, экстремумы функции $y = f(x)$, промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика данной функции.

Варианты:

$$1. y = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + 4$$

$$2. y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 6$$

$$3. y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 21x - 46$$

$$4. y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x - 7^2$$

$$5. y = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + 3$$

$$6. y = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 7x - \sqrt{6}$$

$$7. y = x^3 - x^2 - 5x - \sqrt{8}$$

$$8. y = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 3x + 1$$

$$9. y = \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + 4\pi$$

$$10. y = x^3 - 4x^2 + 5x - \frac{1}{4}$$

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z = f(x; y)$.

Варианты:

$$1. z = x^3 + y^3 - 3xy + 12$$

$$2. z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2 - 3$$

$$3. z = 4x - 4y - x^2 - y^2 - 6$$

$$4. z = 12x - 8y + 3x^2 + 2y^2 + 5$$

$$5. z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$$

$$6. z = 3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 8$$

$$7. z = 5x^2 - 3xy + y^2 - 10$$

$$8. z = 15x - xy - 2x^2 - 2y^2 - 14$$

$$9. z = -2x - 2y + x^2 + y^2 + 4$$

$$10. z = 6x - xy - x^2 - y^2 + 7$$

Задание 8. Найти значение выражения $A \cdot B - 3E + D$, где A, B, D – данные матрицы, E – единичная матрица соответствующей размерности.

Варианты:

$$1. A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ -4 & 6 & -9 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 \\ 7 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 7 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 7 \\ 6 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 8 & 0 \\ 6 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 & 6 \\ -2 & 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -7 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, B = (-1 \ 5 \ 5), D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 9 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, B = (2 \ -4 \ 8 \ 9), D = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \\ -6 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 8 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 3 & 8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -1 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & 3 & 0 \\ 5 & -6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 9. Вычислить определитель:

1) по правилу треугольников;

2) разложив по общему правилу (по строке \ столбцу).

Варианты:

$$1. \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}, \text{ по 3-му столбцу}$$

$$2. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \text{ по 1-й строке}$$

$$3. \Delta = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \text{ по 2-му столбцу}$$

$$4. \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 1 & -9 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \text{ по 2-й строке}$$

$$5. \Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -2 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ по 1-му столбцу}$$

$$6. \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \text{ по 3-й строке}$$

$$7. \Delta = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}, \text{ по 3-му столбцу}$$

$$8. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \text{ по 1-й строке}$$

$$9. \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \text{ по 2-му столбцу}$$

$$10. \Delta = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}, \text{ по 2-й строке}$$