# *РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ*

***для студентов инженерно-технических специальностей вузов***

**ЧАСТЬ 1**

ЧЕБОКСАРЫ
2010

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

ГОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

# РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

***для студентов инженерно-технических специальностей вузов***

**ЧАСТЬ 1**

*Учебно-методическое пособие*

ЧЕБОКСАРЫ
2010

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73 – 4
Р – 248

Расчётно-графические работы по математике для студентов инженерно-технических специальностей вузов. Ч. 1 : учебно-методическое пособие / сост. Н. А. Кузьмина, А. М. Матвеева. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2010. – 90 с.

Печатается по решению учёного совета ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Рецензенты:

В. Г. Иванов – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики ФГОУ ВПО «Чувашская государственная сельскохозяйственная академия»;

П. А. Фисунов – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой геометрии ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева».

Настоящее пособие предназначено для студентов инженерно-технических специальностей и является методическим руководством для преподавателей вузов, которые ведут курс «Математика». Содержит комплекс индивидуальных заданий по математике и методическое руководство по их выполнению.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов первого и второго курсов технолого-экономических факультетов (специальности: «Конструирование швейных изделий», «Технология швейных изделий», «Технология и предпринимательство»), а также для преподавателей высших учебных заведений, которые ведут курс «Математика».

Пособие соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования для специальностей «Конструирование швейных изделий», «Технология швейных изделий», «Технология и предпринимательство», является сборником индивидуальных заданий по математике (каждое задание состоит из 30 вариантов) и руководством по их выполнению.

Учебно-методическое пособие подготовлено в помощь по изучению таких тем математики, как:

- линейная алгебра,
- векторная алгебра,
- аналитическая геометрия,
- дифференциальное исчисление функций одной и двух переменных.

## Расчётно-графическая работа № 1
## по теме: «Линейная алгебра»

Задание 1. Найти значение выражения $mA \cdot B + nE + kD$, где $A$, $B$, $D$ – матрицы, $E$ – единичная матрица соответствующей размерности, $m$, $n$, $k$ – действительные числа.

Варианты:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$,

$m = 2, n = -1, k = 3$

2. $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -6 \\ 8 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -8 & 10 & 9 \\ 3 & -7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$,

$m = -1, n = 4, k = 2$

3. $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 0 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -9 & 1 & 7 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}$,

$m = -2, n = 5, k = 1$

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \\ 9 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 0 \\ -6 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 \\ 6 & 9 & -8 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$,

$m = 2, n = -4, k = -1$

5. $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$,

$m = -3, n = 5, k = -2$

6. $A=\begin{pmatrix}6 & -1 & 2 & 2\\ 3 & -5 & 4 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 9\\ -3 & 7\\ -1 & 0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix},$

$m=-2, n=6, k=3$

7. $A=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 1\\ 6 & -4 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 2\\ -1 & 8 & 4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}6 & 3 & -4\\ 0 & 2 & -7\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix},$

$m=3, n=-4, k=-1$

8. $A=\begin{pmatrix}-8\\ 2\\ 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 5 & -3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3 & -4 & 6\\ 5 & -9 & 1\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix},$

$m=2, n=3, k=2$

9. $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 5\\ -5 & -1 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -7\\ 2 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix},$

$m=4, n=-1, k=2$

10. $A=\begin{pmatrix}6\\ -4\\ 2\\ 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1 & 5\\ -2 & 4 & 6 & 7\\ 3 & 6 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 7 & 9\end{pmatrix},$

$m=-1, n=5, k=-2$

11. $A=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 7\\ -4 & 6 & -9\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}8 & 1 & -3\\ 7 & 5 & -4\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix},$

$m=-1, n=4, k=3$

12. $A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 6 & 2\\ 1 & 0\\ -3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2 & 6\\ 7 & 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 7\\ 6 & 2 & 3 & -4\\ 3 & 4 & 8 & 0\\ 6 & 2 & -5 & -3\end{pmatrix}$,

$m=-1, n=3, k=2$

13. $A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 6 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -6 & 7\end{pmatrix}$,

$m=5, n=9, k=-3$

14. $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -4 & 6\\ -2 & 7 & -2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 4 & 2\\ 0 & 5\\ 9 & 3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 2 & -8\end{pmatrix}$,

$m=6, n=10, k=-4$

15. $A=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 1\\ 6 & -4 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 2\\ -1 & 8 & 4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}6 & 3 & -4\\ 0 & 2 & -7\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$,

$m=3, n=-4, k=-1$

16. $A=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 5\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 5 & 8 & -7\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$,

$m=3, n=-6, k=-1$

17. $A=\begin{pmatrix}6 & -1 & 9\\ -5 & 3 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 2 & -1\\ 5 & 8\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}5 & -6\\ -8 & -9\end{pmatrix}$,

$m=7, n=-5, k=4$

18. $A=\begin{pmatrix}2\\-4\\6\\-7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 8 & 9\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}6 & -9 & 1 & 4\\-2 & 3 & -7 & 5\\0 & 2 & 7 & 3\\-6 & 1 & 5 & 4\end{pmatrix},$

$m=-2, n=6, k=-1$

19. $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\3 & 7\\1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}9 & -1 & 8\\5 & -7 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\-2 & 5 & 7\\3 & 6 & 8\end{pmatrix},$

$m=2, n=-7, k=-2$

20. $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\-1 & 2\\3 & 8\\-4 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 6 & 1\\8 & 5 & -2 & 3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3 & 5\\6 & -1 & 4 & 2\\8 & -4 & 3 & 0\\5 & -6 & 7 & 1\end{pmatrix},$

$m=-2, n=8, k=1$

21. $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\6 & 9\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -9\\7 & 8\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3 & 6\\4 & -5\end{pmatrix},$

$m=-4, n=10, k=-3$

22. $A=\begin{pmatrix}5 & -4 & -1 & 3\\5 & 8 & 6 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\6 & 5\\7 & -4\\-2 & 8\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3 & 5\\9 & 7\end{pmatrix},$

$m=2, n=-4, k=-3$

23. $A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 4\\-6 & 8 & 2\\-1 & 0 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7 & -2 & 9\\-6 & 3 & 8\\4 & 6 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\7 & 6 & 1\\8 & -2 & -7\end{pmatrix},$

$m=2, n=-6, k=3$

24. $A=\begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -7\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}6 & -1 & 0\\2 & -6 & 5\\7 & 2 & -4\end{pmatrix},$

$m=-1, n=7, k=-2$

25. $A=\begin{pmatrix}-2 & 6 & 1\\4 & -5 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 2\\-3 & 5\\7 & 9\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}6 & -4\\2 & 1\end{pmatrix},$

$m=-2, n=5, k=3$

26. $A=\begin{pmatrix}0\\-3\\9\\4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 6 & -4 & 7\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3 & 0\\6 & 1 & -2 & 9\\3 & -4 & 5 & 2\\2 & -1 & 5 & 7\end{pmatrix},$

$m=-2, n=9, k=-1$

27. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\-4 & -5\\3 & 8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 5 & -4\\6 & 2 & 8\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0 & -4 & 8\\3 & 6 & -2\\7 & -1 & 0\end{pmatrix},$

$m=2, n=5, k=-2$

28. $A=\begin{pmatrix}6 & -4\\2 & 3\\1 & 1\\8 & -4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 5 & 4 & 2\\-1 & 2 & 3 & 2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}7 & -4 & 3 & 5\\-1 & -2 & 1 & 0\\5 & -3 & 1 & 4\\2 & 8 & 6 & 0\end{pmatrix},$

$m=1, n=7, k=-2$

29. $A=\begin{pmatrix}2 & -7\\6 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 3\\5 & -1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 9\end{pmatrix},$

$m=4, n=-4, k=2$

30. $A=\begin{pmatrix}6 & 2 & 5 & -1\\ 3 & 5 & 7 & -4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\\ 6 & 4\\ 8 & 5\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ -5 & 7\end{pmatrix},$

$m=-4, n=1, k=3$

Задание 2. Вычислить определитель (разложив его по строке или столбцу, предварительно получив нули).

Варианты:

1. $\Delta=\begin{vmatrix}6 & -2 & -6 & 4\\ -4 & -4 & 2 & -7\\ -3 & 6 & -2 & 4\\ 3 & -5 & -2 & -2\end{vmatrix}$

2. $\Delta=\begin{vmatrix}-3 & -4 & -2 & -4\\ -6 & -5 & -4 & -5\\ -5 & -6 & -2 & -7\\ -4 & 2 & -5 & 3\end{vmatrix}$

3. $\Delta=\begin{vmatrix}-5 & -1 & -3 & -1\\ 5 & 2 & 3 & 2\\ -1 & -1 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 4 & -7\end{vmatrix}$

4. $\Delta=\begin{vmatrix}4 & -3 & -1 & -1\\ -3 & 2 & -6 & -2\\ 5 & -5 & -6 & -2\\ 1 & 1 & -5 & -4\end{vmatrix}$

5. $\Delta=\begin{vmatrix}-7 & 3 & 5 & 5\\ -4 & -6 & 5 & 6\\ -2 & -2 & -5 & -5\\ -1 & -2 & -5 & -5\end{vmatrix}$

6. $\Delta=\begin{vmatrix}-4 & -5 & 5 & 2\\ 3 & 1 & -5 & 4\\ 1 & 5 & -4 & 1\\ -6 & -2 & 5 & 2\end{vmatrix}$

7. $\Delta=\begin{vmatrix}6 & 4 & -4 & -4\\ 1 & 3 & 2 & -1\\ 2 & 2 & -6 & 1\\ -4 & -7 & 3 & 1\end{vmatrix}$

8. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 6 & 1 & 5\\ 3 & -6 & -2 & -4\\ 4 & 2 & -3 & 2\\ 2 & -3 & 2 & -1\end{vmatrix}$

9. $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -5 & -6 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

10. $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -7 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ -5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & -7 \end{vmatrix}$

11. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ -3 & -2 & 2 & -6 \end{vmatrix}$

12. $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & -6 & 3 \\ -7 & 4 & -6 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

13. $\Delta = \begin{vmatrix} -6 & 5 & 5 & 6 \\ -5 & -1 & 5 & 6 \\ -5 & -5 & 4 & -7 \\ 4 & -1 & -4 & -7 \end{vmatrix}$

14. $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 6 & -6 \\ 5 & -7 & -6 & 1 \\ 3 & 5 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

15. $\Delta = \begin{vmatrix} -6 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -7 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

16. $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -5 \\ -5 & 3 & -7 & 3 \\ -1 & 5 & -3 & -3 \\ 2 & -7 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

17. $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 1 & 5 \\ -7 & -3 & 1 & -6 \\ -3 & -7 & 2 & -4 \\ -6 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

18. $\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -5 & -6 & 5 \\ -5 & 5 & 3 & 5 \\ -2 & -5 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

19. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & -3 \\ 5 & -4 & -5 & 4 \\ 1 & -7 & -5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \end{vmatrix}$  20. $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & -4 & -7 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

21. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 6 & 6 & 5 \\ -3 & 4 & 6 & 6 \end{vmatrix}$  22. $\Delta = \begin{vmatrix} -6 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & -7 & 4 & -2 \\ 6 & -6 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

23. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & -6 & -3 \\ 1 & -7 & -4 & -5 \\ -1 & 5 & -4 & -2 \end{vmatrix}$  24. $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -5 & 4 \\ -4 & -3 & 4 & -3 \\ 6 & -5 & -5 & 1 \\ -1 & -7 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

25. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -7 & 6 \\ -6 & -3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & -7 \end{vmatrix}$  26. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 & 3 \\ -7 & -2 & -4 & -6 \\ -5 & -7 & -6 & -5 \\ -5 & -4 & 6 & -1 \end{vmatrix}$

27. $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & -5 \\ -1 & -4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$  28. $\Delta = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -4 & 4 \\ -2 & -2 & 4 & -6 \\ -7 & -6 & 5 & 4 \\ -6 & 3 & -2 & -6 \end{vmatrix}$

29. $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -4 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & -7 & -3 \\ 6 & 3 & -1 & -1 \\ -5 & 4 & 6 & -5 \end{vmatrix}$

30. $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -6 \\ 2 & -6 & -6 & -3 \end{vmatrix}$

Задание 3. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Варианты:

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 = -6, \\ -3x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 25. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 + 8x_4 = 8, \\ 3x_1 + 11x_2 + x_3 + 16x_4 = 17, \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -2, \\ 4x_1 + 14x_2 + 19x_3 - 6x_4 = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7, \\ -2x_1 - x_2 - 7x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 10, \\ 3x_1 + 4x_3 + 11x_4 = 11. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 5, \\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 - x_4 = 8. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 14, \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 13x_4 = 17. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 13x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 11x_4 = 19. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 10x_4 = 7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 = 13, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 10. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 15, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_4 = 6. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 3, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = -6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = -2, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 11x_4 = -9, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6, \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 8x_4 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 10x_4 = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 - 8x_2 + 9x_3 - 20x_4 = 18, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 12. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 11. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + x_4 = -5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 2x_4 = -6. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 7, \\ 3x_1 - 3x_2 - 8x_3 - 5x_4 = 12. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 14, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_4 = 19, \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6, \\ 6x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 15x_4 = 7, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 2, \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_4 = -6. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 = -1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 6x_4 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 27, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 = 13, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 = 5. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 12x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 19, \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -3. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 9, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -9. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 9x_2 - 14x_3 + 22x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -11, \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 11x_4 = 4. \end{cases}$

Задание 4. Решить систему линейных алгебраических уравнений:
а) по формулам Крамера;
б) матричным методом.

Сделать проверку.

Варианты:

1. $\begin{cases} -2x_1+5x_2+x_3=13, \\ -2x_1+3x_2+x_3=9, \\ 3x_1+5x_3=2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=6, \\ -4x_1+5x_2-x_3=7, \\ 2x_1-6x_2+4x_3=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x_1+6x_2+5x_3=13, \\ 3x_1+2x_2+7x_3=23, \\ -x_2-x_3=-1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2x_1+3x_2-x_3=-9, \\ 2x_1-x_2-3x_3=3, \\ 2x_1-3x_2-5x_3=-3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -5x_1+2x_2+6x_3=-5, \\ 7x_1-5x_2+2x_3=30, \\ -6x_1+3x_2-x_3=-23. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x_1+2x_2+5x_3=8, \\ x_1-2x_2+4x_3=10, \\ -2x_1+3x_2-x_3=-7. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_2-3x_3=-5, \\ x_1-2x_2+x_3=-7, \\ -x_1-8x_2+3x_3=-21. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=-4, \\ -2x_1+5x_2-2x_3=25, \\ -4x_1+x_2+x_3=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x_1-4x_2=17, \\ -2x_1-4x_2-4x_3=-14, \\ -6x_1+4x_2+x_3=-13. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -4x_1-3x_2+2x_3=7, \\ x_1-2x_2+3x_3=-3, \\ x_1+7x_2-7x_3=4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} -2x_1+3x_2-2x_3=7, \\ -7x_1+2x_2+x_3=32, \\ x_1-6x_2+3x_3=-4. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3=-3, \\ 3x_1-2x_2=-11, \\ 3x_1-2x_2+x_3=-9. \end{cases}$

13. $\begin{cases} -6x_1-6x_2+5x_3=37, \\ -x_1+3x_2+2x_3=-4, \\ 2x_1+4x_2+x_3=-7. \end{cases}$

14. $\begin{cases} -x_1-2x_2+5x_3=-6, \\ -3x_1+x_2+2x_3=-13, \\ x_1-5x_2-2x_3=21. \end{cases}$

15. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -7, \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -11, \\ 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 = -28. \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6, \\ -5x_1 - 6x_2 - x_3 = -13, \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 17. \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} -4x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 20, \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 12, \\ -6x_1 - 2x_3 = 6. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} -4x_1 - x_2 + 5x_3 = -13, \\ -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -9, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 36, \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -15, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + 4x_3 = -6, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 7, \\ -8x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -21. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -14, \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -11, \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 = -2. \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 4, \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -14. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 25, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 18, \\ -5x_1 - 4x_2 + x_3 = -21. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} -4x_1 - x_2 + 5x_3 = -21, \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -12, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -9, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = -6, \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -13. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 15, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 14, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -13. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 7, \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = -13. \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 19, \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -5, \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3. \end{cases}$$

29. $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -15, \\ -x_1 + 3x_2 = 6, \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 1, \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 = -8, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 3. \end{cases}$

## ***Решение задач типового варианта***

Задание 1. Найти значение выражения $mA \cdot B + nE + kD$, где $A$, $B$, $D$ – матрицы, $E$ – единичная матрица соответствующей размерности, $m$, $n$, $k$ –действительные числа:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix},$$

$$m = -2, n = 3, k = 4.$$

*Матрицей размерностью* $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из $m$ строк и $n$ столбцов.

*Суммой матриц* одинаковой размерности называется матрица той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих элементов исходных матриц:

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}, \text{ где } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

*Произведением матрицы* $A$ *на число* $\lambda$ называется матрица $\lambda A$ той же размерности, элементы которой равны произведению элементов матрицы $A$ на число $\lambda$:

$$\lambda A_{m\times n} = (\lambda \cdot a_{ij}),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

*Произведением матриц* $A_{m\times p} = (a_{ik})$, $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,p}$ и $B_{p\times n} = (b_{kj})$, $k = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,n}$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, элементы $c_{ij}$ которой равны произведению $i$-й строки матрицы $A$ на $j$-й столбец матрицы $B$.

Замечание. Для того чтобы можно было выполнить умножение, число столбцов первой матрицы должно быть равным числу строк второй матрицы.

Решение.

Найдём значение выражения $-2A\cdot B+3E+4D$.

1) Найдем $A\cdot B$.

Согласно замечанию, для того чтобы можно было выполнить умножение матриц $A$ и $B$, число столбцов матрицы $A$ должно быть равным числу строк матрицы $B$.

В данном случае имеем $\dim A = 2\times 3$, $\dim B = 3\times 2$, то есть число столбцов матрицы $A$ и число строк матрицы $B$ совпадают и равны 3, следовательно, по определению произведения двух матриц, размерность матрицы произведения $A$ и $B$ есть $\dim A\cdot B = 2\times 2$.

Выполним умножение матриц $A$ и $B$:

$$C = A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2},$$

где $c_{11} = 2\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+(-4)\cdot 6 = 4+1-24 = -19;$

$c_{12} = 2\cdot(-2)+(-1)\cdot 4+(-4)\cdot 0 = -4-4+0 = -8;$

$c_{21} = 3\cdot 2+0\cdot(-1)+5\cdot 6 = 6+0+30 = 36;$

$c_{22} = 3\cdot(-2)+0\cdot 4+5\cdot 0 = -6+0+0 = -6.$

Следовательно, $C = A\cdot B = \begin{pmatrix} -19 & -8 \\ 36 & -6 \end{pmatrix}$.

2) Найдём $-2A\cdot B$:

$$-2A\cdot B = -2\cdot\begin{pmatrix} -19 & -8 \\ 36 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot(-19) & -2\cdot(-8) \\ -2\cdot 36 & -2\cdot(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 16 \\ -72 & 12 \end{pmatrix}.$$

3) Найдем $3E$.

Согласно определению суммы матриц, для того чтобы сумма $-2A\cdot B+3E+4D$ имела смысл, размерности матриц $A\cdot B$, $D$ и $E$ должны совпадать, следовательно, $\dim E = 2\times 2$, то есть $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$3E = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4) Найдём $4D$:

$$4D = 4\cdot\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot(-3) & 4\cdot(-6) \\ 4\cdot 7 & 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -24 \\ 28 & 8 \end{pmatrix}.$$

5) Найдём $-2A\cdot B+3E$:

$$-2A\cdot B+3E=\begin{pmatrix}38 & 16\\ -72 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38+3 & 16+0\\ -72+0 & 12+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41 & 16\\ -72 & 15\end{pmatrix}.$$

6) Найдём $-2A\cdot B+3E+4D$:

$$-2A\cdot B+3E+4D=\begin{pmatrix}41 & 16\\ -72 & 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12 & -24\\ 28 & 8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}41+(-12) & 16+(-24)\\ -72+28 & 15+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29 & -8\\ -44 & 23\end{pmatrix}.$$

*Ответ*: $-2A\cdot B+3E+4D=\begin{pmatrix}29 & -8\\ -44 & 23\end{pmatrix}$.

Задание 2. Вычислить определитель (разложив его по строке или столбцу, предварительно получив нули):

$$\Delta=\begin{vmatrix}-8 & 4 & -6 & -1\\ -5 & -7 & 2 & -1\\ 9 & 9 & 3 & -3\\ -1 & -6 & -1 & 4\end{vmatrix}.$$

Правило вычисления определителя второго порядка:

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc.$$

Определитель третьего порядка можно вычислить с помощью *правила треугольников*:

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{vmatrix}=aek+bfg+dhc-gec-dbk-hfa.$$

*Алгебраическим дополнением* $A_{ij}$ *элемента* $a_{ij}$ называется определитель, который получается из исходного определителя вычеркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца, умноженный на число $(-1)^{i+j}$.

*Общее правило вычисления определителя*: определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) определителя на их алгебраические дополнения.

В частности, определитель 3-го порядка можно вычислить, разложив его по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

При вычислении определителя воспользуемся его свойствами:

1. если некоторая строка (или столбец) определителя состоит только из нулей, то определитель равен нулю;

2. определитель, имеющий две одинаковые строки (или столбца), равен нулю;

3. при перестановке двух строк или столбцов знак определителя меняется;

4. общий множитель некоторой строки (или столбца) определителя можно вынести за знак определителя;

5. если к элементам некоторой строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на постоянное число, то величина определителя не изменится.

Решение.

Разложим данный определитель $\Delta$ четвертого порядка по элементам 3-й строки, предварительно получив в ней нули. Полученный определитель третьего порядка разложим по элементам 3-го столбца.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 & -1 \\ -5 & -7 & 2 & -1 \\ 9 & 9 & 3 & -3 \\ -1 & -6 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{св.4}}{=} 3\begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 & -1 \\ -5 & -7 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -6 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{св.4}}{=}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 8 & -4 & 6 & 1 \\ -5 & -7 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -6 & -1 & 4 \\ & & & \times 3 \end{vmatrix} \overset{\text{св.5}}{=} -3\begin{vmatrix} 11 & -4 & 6 & 1 \\ -8 & -7 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 11 & -6 & -1 & 4 \\ & & & \times 3 \end{vmatrix} \overset{\text{св.5}}{=}$$

$$
=-3\begin{vmatrix} 11 & -1 & 6 & 1 \\ -8 & -10 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 11 & 6 & -1 & 4 \\ & & & \times 1 \end{vmatrix} \overset{\text{св.}5}{=} -3\begin{vmatrix} 11 & -1 & 7 & 1 \\ -8 & -10 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 11 & 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} =
$$

$$
=-3\cdot(-1)\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 11 & -1 & 7 \\ -8 & -10 & 1 \\ 11 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 11 & -1 & 7 \\ -8 & -10 & 1 \\ 11 & 6 & 3 \end{vmatrix} \times(-7) \overset{\text{св.}5}{=}
$$

$$
=-3\begin{vmatrix} 67 & 69 & 0 \\ -8 & -10 & 1 \\ 11 & 6 & 3 \end{vmatrix} \times(-3) \overset{\text{св.}5}{=} -3\begin{vmatrix} 67 & 69 & 0 \\ -8 & -10 & 1 \\ 35 & 36 & 0 \end{vmatrix} =
$$

$$
=-3\cdot 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 67 & 69 \\ 35 & 36 \\ \times(-1) & \end{vmatrix} \overset{\text{св.}5}{=} = 3\begin{vmatrix} 67 & 2 \\ 35 & 1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= 3(67\cdot 1 - 2\cdot 35) = 3(67-70) = 3\cdot(-3) = -9.
$$

*Ответ*: $\Delta = -9$.

<u>Задание 3.</u> Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

*Метод Гаусса* заключается в следующем:

1) расширенную матрицу системы привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками матрицы;

2) записать систему уравнений, соответствующую ступенчатой матрице;

3) выбрать свободные и базисные переменные, определить значения базисных переменных из системы уравнений, то есть записать общее решение системы; получить какое-либо частное решение системы.

*Частным решением* системы уравнений называется набор значений неизвестных, удовлетворяющих всем уравнениям системы.

*Общим решением* системы уравнений называется выражение (система выражений), зависящих от одного или нескольких параметров (обычно это свободные переменные), обладающее следующими свойствами:

1) при конкретных значениях параметров это выражение (система выражений) дает частное решение системы;

2) любое частное решение может быть получено из этого выражения при конкретных значениях параметров.

Над строками матриц можно осуществлять следующие элементарные преобразования:

$\alpha$ – перестановка местами двух строк;

$\beta$ – умножение строки на число, отличное от нуля;

$\gamma$ – прибавление к одной строке другой, умноженной на число, отличное от нуля;

$\delta$ – отбрасывание нулевой строки.

При помощи этих преобразований любую матрицу $A$ можно привести к ступенчатому виду. Ранг $rgA$ матрицы $A$ равен числу строк соответствующей ступенчатой матрицы.

Пример 1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -3, \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 + 7x_4 = -2, \\ 6x_1 + 9x_3 + 12x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение.

1) Для данной системы запишем матрицу $A$ и расширенную матрицу $B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & 7 \\ 6 & 0 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \ B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & 7 & -2 \\ 6 & 0 & 9 & 12 & -1 \end{array}\right).$$

Приведём расширенную матрицу $B$ к ступенчатому виду методом элементарных преобразований:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & 7 & -2 \\ 6 & 0 & 9 & 12 & -1 \end{array}\right) \times 1, (-2), (-3) \xrightarrow{\gamma} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \times 1 \xrightarrow{\gamma}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -6 \end{array}\right) \times(-1) \xrightarrow{\gamma} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\beta,\delta}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right).$$

Следовательно, $rgA = rgB = 3$.

Пусть $r = rgA = rgB = 3$. Так как $r < n$, где $n$ – число неизвестных системы, в данном случае $n = 4$, то данная система имеет бесконечное множество решений.

2) Запишем систему уравнений, соответствующую ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ \quad 3x_2 \qquad\quad + 2x_4 = -2, \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_4 = 6. \end{cases}$$

3) Найдём общее решение и какое-либо частное решение системы.

Определим число свободных переменных в общем решении системы: $n - r = 4 - 3 = 1$, то есть общее решение будет содержать одну свободную переменную.

Из последних двух уравнений полученной системы находим:

$x_4 = 6$,

$$x_2 = \frac{-2 - 2x_4}{3} = \frac{-2 - 2\cdot 6}{3} = \frac{-14}{3}.$$

Подставим найденные значения $x_2$ и $x_4$ в первое уравнение и выразим неизвестную $x_1$:

$$x_1 = \frac{1 - x_2 - 3x_3 - 5x_4}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{14}{3}\right) - 3x_3 - 5\cdot 6}{2} = \frac{-9x_3 - 73}{6} = -\frac{3}{2}x_3 - \frac{73}{6}.$$

Запишем общее решение системы: $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}x_3 - \dfrac{73}{6}, \\ x_2 = -\dfrac{14}{3}, \\ x_4 = 6. \end{cases}$

Неизвестные $x_1, x_2, x_4$ в данном случае являются базисными переменными, а $x_3$ – свободной.

Найдём частное решение системы:

пусть $x_3 = -8$, тогда $x_1 = -\frac{3}{2}(-8) - \frac{73}{6} = 12 - \frac{73}{6} = -\frac{1}{6}$, то есть $\left(-\frac{1}{6}; -\frac{14}{3}; -8; 6\right)$ – частное решение системы.

*Ответ*: $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}x_3 - \dfrac{73}{6}, \\ x_2 = -\dfrac{14}{3}, \\ x_4 = 6 \end{cases}$ – общее решение системы,

$\left(-\frac{1}{6}; -\frac{14}{3}; -8; 6\right)$ – частное решение.

Пример 2. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases}$$

Решение.

1) Для данной системы запишем матрицу $A$ и расширенную матрицу $B$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right).$$

Приведём расширенную матрицу $B$ к ступенчатому виду методом элементарных преобразований:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&2&1&2\\1&-1&3&2&-1\\4&3&5&3&-2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&2&-1\\3&4&2&1&2\\4&3&5&3&-2\end{array}\right)\begin{matrix}\times(-3),(-4)\\ \\ \\ \end{matrix}\overset{\gamma}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&2&-1\\0&7&-7&-5&5\\0&7&-7&-5&2\end{array}\right)\times(-1)\overset{\gamma}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&2&-1\\0&7&-7&-5&5\\0&0&0&0&-3\end{array}\right).$$

Следовательно, $rgA=2$, $rgB=3$. Так как $rgA\neq rgB$, то данная система не имеет решений.

*Ответ*: система не имеет решений.

Задание 4. Решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}4x_1+3x_2-x_3=5,\\5x_1+4x_3=7,\\2x_1+x_2+2x_3=8\end{cases}$$

а) по формулам Крамера;
б) матричным методом.

Сделать проверку.

а) Решение по формулам Крамера.

Найдём определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}4&3&-1\\5&0&4\\2&1&2\end{vmatrix}=4\cdot0\cdot2+3\cdot4\cdot2+5\cdot1\cdot(-1)-2\cdot0\cdot(-1)-5\cdot3\cdot2-1\cdot4\cdot4=$$

$$=0+24-5-0-30-16=-27.$$

Так как $\Delta=-27\neq0$, то данная система имеет единственное решение, которое определяется по *формулам Крамера* $x_k=\dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, где $k=1,2,3$, $\Delta_k$ – определитель, полученный из основного определителя $\Delta$ заменой $k$-го столбца на столбец свободных членов системы.

Найдём значения определителей $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 96 - 7 - 0 - 42 - 20 = 27,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 56 + 40 - 40 - (-14) - 50 - 128 = -108,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0 + 42 + 25 - 0 - 120 - 28 = -81.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{27}{-27} = -1;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-108}{-27} = 4;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-81}{-27} = 3.$$

Проверим правильность полученного решения. Для этого подставим полученные значения неизвестных $x_1, x_2, x_3$ в систему:

$$\begin{cases} 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 - 3 = 5, \\ 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 7, \\ 2(-1) + 4 + 2 \cdot 3 = 8. \end{cases}$$

Все полученные равенства верные, следовательно, (–1; 4; 3) – решение данной системы.

б) Решение матричным методом.

Решение системы *матричным методом* находится по формуле $x = A^{-1}b$.

Для того чтобы записать систему в матричной форме, введем следующие обозначения: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Найдём обратную матрицу $A^{-1}$ матрицы $A$ системы через алгебраические дополнения по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}(A_{ij})^t$.

Вычислим значение определителя матрицы $A$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -27.$$

Найдём алгебраические дополнения $A_{ij}$ элементов $a_{ij}$ определителя матрицы $A$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(10 - 8) = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 0 = 5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - (-1)) = -7,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - (-2) = 10,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(4 - 6) = 2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(16 - (-5)) = -21,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 15 = -15.$$

Составим матрицу $(A_{ij})$ и её транспонированную матрицу $(A_{ij})^t$:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ -7 & 10 & 2 \\ 12 & -21 & -15 \end{pmatrix}, \ (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 12 \\ -2 & 10 & -21 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица $A^{-1}$ примет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}(A_{ij})^t = \frac{1}{-27}\begin{pmatrix} -4 & -7 & 12 \\ -2 & 10 & -21 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix}.$$

Решение системы:

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{-27}\begin{pmatrix} -4 & -7 & 12 \\ -2 & 10 & -21 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 27 \\ -108 \\ -81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

то есть $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$.

*Ответ*: (–1; 4; 3).

## Расчётно-графическая работа № 2
## по теме: «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия»

Задание 1. Даны координаты вершин пирамиды *SABCD*, в основании которой лежит параллелограмм *ABCD*. Используя методы векторной алгебры, найти:

а) объём *V* пирамиды;

б) площадь *S* основания *ABCD*;

в) координаты вершины *C*;

г) высоту *h*, проведённую из вершины пирамиды, к грани $\pi$ ;

д) угол $\alpha$ между ребрами;

е) угол $\beta$ между гранями.

Сделать чертёж.

Варианты:

1. *A*(2;–5;3), *S*(4;–3;4), *B*(–4;–4;1), *D*(2;–2;3),

   $h$=$AH$, $\pi = BCS$, $\alpha = (AB\hat{,}CS)$, $\beta = (ABCD\hat{,}ABS)$

2. *A*(0;–4;–4), *S*(–4;–2;1), *B*(1;–1;–3), *D*(–1;4;1),

   $h$=$BH$, $\pi = CSD$, $\alpha = (BC\hat{,}DS)$, $\beta = (ABS\hat{,}BCS)$

3. $A(-1;0;-2)$, $S(-3;0;3)$, $B(-4;-3;-4)$, $D(-2;0;0)$,

$h=CH$, $\pi = ASD$, $\alpha = (CD\widehat{,}AS)$, $\beta = (BCS\widehat{,}CDS)$

4. $A(-4;-2;0)$, $S(-3;-5;-3)$, $B(-2;-1;-2)$, $D(0;1;-4)$,

$h=DH$, $\pi = ASB$, $\alpha = (AD\widehat{,}BS)$, $\beta = (CDS\widehat{,}ADS)$

5. $A(4;-3;-5)$, $S(2;-4;2)$, $B(2;-3;-4)$, $D(-4;-4;-2)$,

$h=SH$, $\pi = ABCD$, $\alpha = (AB\widehat{,}DS)$, $\beta = (ABCD\widehat{,}BCS)$

6. $A(-1;-3;-2)$, $S(0;1;3)$, $B(-1;-3;0)$, $D(0;-3;1)$,

$h=AH$, $\pi = CSD$, $\alpha = (BC\widehat{,}AS)$, $\beta = (ABS\widehat{,}CDS)$

7. $A(1;2;-2)$, $S(-4;-1;0)$, $B(-3;1;0)$, $D(-5;2;3)$,

$h=BH$, $\pi = ASD$, $\alpha = (CD\widehat{,}BS)$, $\beta = (BCS\widehat{,}ADS)$

8. $A(1;-4;-2)$, $S(0;-4;-5)$, $B(1;-4;-1)$, $D(1;-2;-2)$,

$h=CH$, $\pi = ASB$, $\alpha = (AD\widehat{,}CS)$, $\beta = (CDS\widehat{,}ADS)$

9. $A(0;3;-4)$, $S(3;1;3)$, $B(4;2;-2)$, $D(1;3;-4)$,

$h=DH$, $\pi = SBC$, $\alpha = (BA\widehat{,}BS)$, $\beta = (ABCD\widehat{,}CDS)$

10. $A(-3;-4;-1)$, $S(2;-3;-5)$, $B(-2;-2;-2)$, $D(-3;-1;0)$,

$h=SH$, $\pi = ABCD$, $\alpha = (CB\widehat{,}CS)$, $\beta = (ABS\widehat{,}ADS)$

11. $A(1;-4;2)$, $S(1;-3;-2)$, $B(3;-3;1)$, $D(3;-1;-2)$,

$h=AH$, $\pi = BCS$, $\alpha = (DC\widehat{,}DS)$, $\beta = (BCS\widehat{,}CDS)$

12. $A(-4;-3;-1)$, $S(0;1;-1)$, $B(1;-2;0)$, $D(-2;-3;0)$,

$h=BH$, $\pi = CSD$, $\alpha = (AD \widehat{,} AS)$, $\beta = (CDS \widehat{,} ADS)$

13. $A(-2;-1;-1)$, $S(4;-3;-4)$, $B(-3;-3;1)$, $D(-4;-2;2)$,

$h=CH$, $\pi = ASD$, $\alpha = (BA \widehat{,} BC)$, $\beta = (ABCD \widehat{,} ADS)$

14. $A(2;-4;-3)$, $S(3;-5;2)$, $B(3;-2;0)$, $D(4;-1;-1)$,

$h=DH$, $\pi = ASB$, $\alpha = (CB \widehat{,} CD)$, $\beta = (ABS \widehat{,} BCS)$

15. $A(1;-1;-2)$, $S(-3;-3;-5)$, $B(1;-3;-5)$, $D(-1;-2;-3)$,

$h=SH$, $\pi = ABCD$, $\alpha = (DC \widehat{,} DA)$, $\beta = (BCS \widehat{,} ADS)$

16. $A(2;0;2)$, $S(3;3;1)$, $B(2;3;4)$, $D(3;1;4)$,

$h=AH$, $\pi = CSD$, $\alpha = (AD \widehat{,} AB)$, $\beta = (CDS \widehat{,} ADS)$

17. $A(-3;-1;-5)$, $S(-2;-1;-5)$, $B(-3;-4;-5)$, $D(0;-1;-1)$,

$h=BH$, $\pi = ASD$, $\alpha = (AB \widehat{,} AS)$, $\beta = (ABCD \widehat{,} ABS)$

18. $A(-3;3;4)$, $S(0;-2;1)$, $B(-1;-5;-1)$, $D(-2;1;2)$,

$h=CH$, $\pi = ASB$, $\alpha = (BC \widehat{,} BS)$, $\beta = (ABS \widehat{,} CDS)$

19. $A(-2; -4;2)$, $S(4;-1;-1)$, $B(3;-2;-2)$, $D(-4;-4;4)$,

$h=DH$, $\pi = SBC$, $\alpha = (CD \widehat{,} CS)$, $\beta = (BCS \widehat{,} CDS)$

20. $A(-3;4;3)$, $S(2;-1;1)$, $B(3;2;3)$, $D(-4;3;3)$,

$h=SH$, $\pi = ABCD$, $\alpha = (DA \widehat{,} DS)$, $\beta = (CDS \widehat{,} ADS)$

21. $A(3;–3;4)$, $S(–1;–2;–5)$, $B(0;–2;–5)$, $D(3;–2;4)$,

$h=AH$, $\pi = BCS$, $\alpha = (SA\hat{,}SB)$, $\beta = (ABCD\hat{,}ABS)$

22. $A(0;–3;2)$, $S(0;–5;–3)$, $B(1;–3;–2)$, $D(–1;–1;3)$,

$h=BH$, $\pi = CSD$, $\alpha = (SB\hat{,}SC)$, $\beta = (ABS\hat{,}ADS)$

23. $A(–1;–4;–1)$, $S(–3;–2;–2)$, $B(–5;–3;–2)$, $D(4;–4;0)$,

$h=CH$, $\pi = ASD$, $\alpha = (SC\hat{,}SD)$, $\beta = (BCS\hat{,}ADS)$

24. $A(4;1;4)$, $S(–3;0;–4)$, $B(–1;–1;–3)$, $D(–3;–2;–5)$,

$h=DH$, $\pi = ASB$, $\alpha = (SD\hat{,}SA)$, $\beta = (CDS\hat{,}ADS)$

25. $A(2;–2;0)$, $S(3;0;0)$, $B(2;–4;0)$, $D(2;–5;–5)$,

$h=SH$, $\pi = ABCD$, $\alpha = (AB\hat{,}CS)$, $\beta = (ABCD\hat{,}CDS)$

26. $A(4;–3;2)$, $S(–3;0;1)$, $B(–5;–4;0)$, $D(2;–4;1)$,

$h=AH$, $\pi = CSD$, $\alpha = (BC\hat{,}DS)$, $\beta = (ABS\hat{,}BCS)$

27. $A(–3;–3;–3)$, $S(2;–1;1)$, $B(–2;–4;–4)$, $D(–1;–4;–3)$,

$h=BH$, $\pi = ASD$, $\alpha = (CD\hat{,}AS)$, $\beta = (BCS\hat{,}CDS)$

28. $A(4;–2;4)$, $S(–2;–3;–5)$, $B(–3;2;–5)$, $D(1;0;0)$,

$h=CH$, $\pi = ASB$, $\alpha = (AD\hat{,}BS)$, $\beta = (CDS\hat{,}ADS)$

29. $A(2;–3;–1)$, $S(3;–5;–2)$, $B(1;–1;–2)$, $D(–2;4;–3)$,

$h=DH$, $\pi = SBC$, $\alpha = (AB\hat{,}DS)$, $\beta = (ABCD\hat{,}ADS)$

30. $A(3;–2;–1)$, $S(3;–2;–2)$, $B(–2;0;2)$, $D(2;–3;0)$,

$h=SH$, $\pi = ABCD$, $\alpha = (BC\hat{,}AS)$, $\beta = (ABS\hat{,}CDS)$

<u>Задание 2.</u> Решить задачу. Сделать чертёж.

Варианты:

1. Составить уравнение прямой $m$, отстоящей на расстоянии 2 от прямой $l$, проходящей через точки $A(4;–5)$ и $B(-2;3)$.

2. Найти точку, равноудалённую от данных трёх точек: $A(-4;2)$, $B(4;4)$, $C(-1;-1)$.

3. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $2x-y+9=0$ и $x-3y+7=0$ и координаты одной из вершин $(4;7)$. Составить уравнения двух других сторон и его диагоналей.

4. Через точку пересечения прямых $2x-y-1=0$, $x+y-5=0$ провести прямую, перпендикулярную прямой $x-3y-3=0$.

5. Через точку пересечения прямых $x-2y+7=0$, $3x+y-7=0$ провести прямую, параллельную прямой $x+y-1=0$.

6. Даны уравнения двух сторон ромба $x+7y-29=0$ и $x+7y+11=0$ и одной из диагоналей $3x+y-7=0$. Составить уравнения двух других сторон и второй диагонали.

7. Даны уравнение одной из сторон ромба $3x+4y-23=0$ и одной из диагоналей $2x+y-7=0$, точка пересечения диагоналей $M(3;1)$. Вычислить координаты вершин ромба.

8. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $3x+2y-25=0$ и $x-6y+25=0$ и одной из диагоналей $x+4y-15=0$. Вычислить координаты вершин параллелограмма.

9. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $2x+7y-31=0$ и $4x-3y+23=0$ и точка пересечения диагоналей $M(0;2)$. Составить уравнения диагоналей.

10. Даны координаты вершин $\Delta ABC$: $A(-2;3)$, $B(2;5)$, $C(3;-2)$. Составить уравнение высоты $BH$, медианы $CM$.

11. Вычислить координаты вершины $C$ треугольника $ABC$, если $A(-3;2)$, $B(5;-2)$ – две его вершины, $H(4;1)$ – точка пересечения его высот.

12. Даны вершина треугольника $(2;7)$ и уравнения двух высот $x-3y-1=0$ и $x+2y-1=0$. Вычислить координаты остальных вершин.

13. Составить уравнения касательных к окружности $(x-4)^2+(y-1)^2=2$, параллельных прямой $m$: $x-y+2=0$.

14. Составить уравнения касательных к окружности $(x-2)^2+(y-3)^2=8$, перпендикулярных прямой $m$: $x-y+6=0$.

15. На осях координат найти точки, равноудалённые от прямых $x+y+5=0$ и $x-7y+1=0$.

16. На прямой $m$: $x-2y-10=0$ найти точку, равноудалённую от точек $M(-3;-1)$, $N(5;1)$.

17. На прямой $m$: $2x+3y-15=0$ найти точку, равноудалённую от прямых $4x-3y+6=0$ и $4x-3y-12=0$.

18. Одна из вершин квадрата имеет координаты $(6;3)$, центр находится в точке $(3;2)$. Составить уравнения сторон квадрата.

19. Диагональ квадрата задана уравнением $2x-y-1=0$, вершина квадрата находится в точке $(-1;2)$. Найти координаты остальных вершин и центра квадрата.

20. Даны координаты вершин $\Delta ABC$: $A(-5;-1)$, $B(1;7)$, $C(10;-5)$. Составить уравнение биссектрисы $BK$ и вычислить её длину.

21. Даны координаты вершин $\Delta ABC$: $A(-2;5)$, $B(-1;-3)$, $C(7;3)$. Составить уравнение высоты $AH$ и вычислить её длину.

22. Даны координаты вершин $\Delta ABC$: $A(3;5)$, $B(-3;1)$, $C(9;-3)$. Составить уравнения медиан, вычислить координаты центра тяжести треугольника.

23. Найти координаты точки, симметричной точке $K(-1;7)$ относительно прямой, проходящей через начало координат и точку $P(6;3)$.

24. Известны координаты вершин $A(-4;2)$, $B(2;4)$, $D(-5;-5)$ равнобедренной трапеции $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Вычислить координаты вершины $C$, составить уравнения сторон трапеции.

25. Известны координаты вершин $A(-2;4)$, $C(7;-5)$, $D(-5;1)$ трапеции $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Зная координаты точки $N(1;1)$ пересечения диагоналей трапеции, вычислить координаты вершины $B$, составить уравнения сторон.

26. Известны координаты вершин $A(-5;-3)$, $B(1;-9)$ треугольника $ABC$ и координаты центра тяжести $M(1;-5)$. Вычислить координаты вершины $C$, составить уравнения сторон треугольника.

27. Даны координаты вершин $\Delta ABC$: $A(-5;3)$, $B(4;0)$, $C(-1;-5)$. Вычислить угол между высотой $CH$ и медианой $BM$.

28. Найти проекцию точки $N(-1;5)$ на прямую $l$, проходящую через точку $A(6;1)$ и отсекающую на оси $Oy$ отрезок $b=-3$.

29. Через точку $R(4;-1)$ провести прямую, параллельную прямой $l$, которая отсекает на осях координат отрезки $a=-3$ и $b=4$.

30. Прямая $l$ проходит через точку $K(-2;6)$ и образует угол $\varphi = 135°$ с осью $Ox$, прямая $m$ перпендикулярна к прямой $l$ и отсекает на оси $Oy$ отрезок $b = -2$. Составить уравнения прямых $l$ и $m$.

## *Решение задач типового варианта*

Задание 1. Даны координаты вершин пирамиды $SABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$:

$A(6;-7;2)$, $S(-6;1;-5)$, $B(3;-2;3)$, $D(0;4;5)$.

Используя методы векторной алгебры, найти:

а) объём $V$ пирамиды;

б) площадь $S$ основания $ABCD$;

в) координаты вершины $C$;

г) высоту $h=DH$, проведённую из вершины пирамиды, к грани $\pi = SBC$;

д) угол $\alpha = (CD \widehat{,} AS)$ между ребрами;

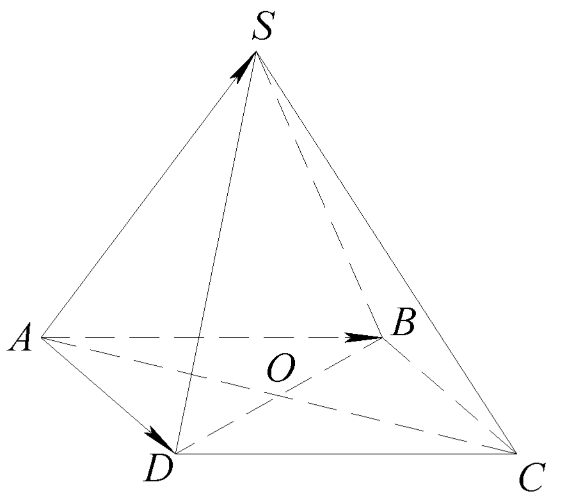
е) угол $\beta = (ABCD \widehat{,} CDS)$ между гранями.

Сделать чертёж.

Решение.

а) Объём $V$ пирамиды вычислим через смешанное произведение трёх векторов, на которых строится пирамида:

$$V = \frac{1}{3} V_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{3}\left|(\overrightarrow{AD}\ \ \overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AS})\right|.$$




Найдём координаты векторов: $\overrightarrow{AD}(0-6;4-(-7);5-2)$, $\overrightarrow{AD}(-6;11;3)$, $\overrightarrow{AB}(-3;5;1)$, $\overrightarrow{AS}(-12;8;-7)$.

Тогда получим

$$V=\frac{1}{3}\left|(\overrightarrow{AD}\ \ \overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AS})\right|=\frac{1}{3}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}-6 & 11 & 3\\ -3 & 5 & 1\\ -12 & 8 & -7\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\left|210-132-72+180-231+48\right|=\frac{1}{3}\cdot 3=1.$$

б) Площадь $S$ основания $ABCD$ вычислим через векторное произведение двух векторов, на которых строится параллелограмм:

$$S_{ABCD}=\left|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\right|.$$

Найдём векторное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{p}=\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & 11 & 3\\ -3 & 5 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}(11-15)-\vec{j}(-6+9)+\vec{k}(-30+33)=$$

$$=-4\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k},$$

то есть $\vec{p}=\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}(-4;-3;3)$.

Тогда $|\vec{p}|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{34}$.

Следовательно, $S_{ABCD}=\left|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\right|=|\vec{p}|=\sqrt{34}$.

в) Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, причем $\overrightarrow{AB}(-3;5;1)$, $\overrightarrow{DC}(x_C-0;y_C-4;z_C-5)$. Следовательно, их соответствующие координаты должны быть равны:

$$x_C-0=-3,\quad y_C-4=5,\quad z_C-5=1;$$

то есть $x_C=-3,\quad y_C=9,\quad z_C=6$.

Таким образом, $C(-3;9;6)$.

г) Высоту $h$=$DH$, проведённую из вершины пирамиды, к грани $\pi=SBC$, вычислим из формулы для определения объема пирамиды:

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн.}}h=\frac{1}{3}S_{SBC}\cdot DH,$$

откуда получим

$$DH=\frac{3V}{S_{SBC}}.$$

Найдём площадь грани $\pi = SBC$ через векторное произведение двух векторов $\overrightarrow{SB}(9;-3;8)$ и $\overrightarrow{SC}(3;8;11)$, на которых строится треугольник $SBC$:

$$S_{SBC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{SC}\right|,$$

где

$$\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{SC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & -3 & 8 \\ 3 & 8 & 11 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(-33-64) - \vec{j}(99-24) + \vec{k}(72+9) =$$

$= -97\vec{i} - 75\vec{j} + 81\vec{k}$,

$\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{SC}(-97;-75;81)$,

то есть $S_{SBC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{SC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-97)^2 + (-75)^2 + 81^2} = \frac{\sqrt{21595}}{2}$.

Следовательно, $DH = \dfrac{3V}{S_{SBC}} = \dfrac{3 \cdot 1}{\frac{1}{2}\sqrt{21595}} = \dfrac{6}{\sqrt{21595}}$.

д) Угол $\alpha = (\widehat{CD, AS})$ между рёбрами $CD$ и $AS$ есть угол между векторами $\overrightarrow{CD}(3;-5;-1)$ и $\overrightarrow{AS}(-12;8;-7)$.

Определим значение

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AS}}) = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AS}}{\left|\overrightarrow{CD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AS}\right|} =$$

$$= \frac{3 \cdot (-12) + (-5) \cdot 8 + (-1) \cdot (-7)}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-1)^2}\sqrt{(-12)^2 + 8^2 + (-7)^2}} =$$

$$= \frac{-69}{\sqrt{35}\sqrt{257}} = \frac{-69}{\sqrt{8995}},$$

откуда $\alpha = \arccos\left(\dfrac{-69}{\sqrt{8995}}\right)$.

е) Угол $\beta = (\widehat{ABCD, CDS})$ между гранями $ABCD$ и $CDS$ есть угол между нормальными векторами этих граней.

Для параллелограмма $ABCD$ нормальным вектором $\vec{n}_1$ является векторное произведение векторов $\overrightarrow{AD}(-6;11;3)$ и $\overrightarrow{AB}(-3;5;1)$:

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}(-4;-3;3) \text{ (см. пункт б).}$$

Для треугольника $CDS$ нормальным вектором $\vec{n}_2$ является векторное произведение векторов $\overrightarrow{CD}(3;-5;-1)$ и $\overrightarrow{CS}(-3;-8;-11)$:

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CS} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & -1 \\ -3 & -8 & -11 \end{vmatrix} = \vec{i}(55-8) - \vec{j}(-33-3) + \vec{k}(-24-15) =$$

$$= 47\vec{i} + 36\vec{j} - 39\vec{k},$$

то есть $\vec{n}_2(47;36;-39)$.

Тогда получим

$$\cos\beta = \cos(ABCD\hat{,}CDS) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} =$$

$$= \frac{(-4)\cdot 47 + (-3)\cdot 36 + 3\cdot(-39)}{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 3^2}\sqrt{47^2 + 36^2 + (-39)^2}} =$$

$$= \frac{413}{\sqrt{34}\sqrt{5026}} = \frac{413}{\sqrt{170884}},$$

откуда $\beta = \arccos\dfrac{413}{\sqrt{170884}}$.

*Ответ*: а) $V = 1$; б) $S_{ABCD} = \sqrt{34}$; в) $C(-3;9;6)$;

г) $DH = \dfrac{6}{\sqrt{21595}}$; д) $\alpha = \arccos\left(\dfrac{-69}{\sqrt{8995}}\right)$;

е) $\beta = \arccos\dfrac{413}{\sqrt{170884}}$.

Задание 2. Дан квадрат. Известны уравнение одной из его сторон $3x + 2y - 23 = 0$ и координаты центра $(2;2)$. Составить уравнения остальных сторон квадрата и вычислить координаты вершин. Сделать чертёж.

*Направляющим вектором прямой* называется любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой.

*Угловым коэффициентом прямой* называется число, равное отношению второй координаты направляющего вектора к первой.

Для прямой с направляющим вектором $\vec{p}(\alpha;\beta)$ угловой коэффициент есть $k=\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\alpha \neq 0$.

*Геометрический смысл углового коэффициента* прямой в прямоугольно декартовой системе координат: угловой коэффициент прямой равен тангенсу направленного угла от базисного вектора оси абсцисс до направляющего вектора прямой ($k=\operatorname{tg}\varphi$, где $\varphi=(\widehat{\vec{i},\vec{p}})$).

*Нормальным вектором прямой* называется любой ненулевой вектор, ортогональный данной прямой.

*Различные способы задания прямой*:

1) уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0;y_0)$ и направляющим вектором $\vec{p}(\alpha;\beta)$ (каноническое уравнение):

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta};$$

2) параметрические уравнения прямой, заданной точкой $M_0(x_0;y_0)$ и направляющим вектором $\vec{p}(\alpha;\beta)$:

$$\begin{cases} x=x_0+\alpha t, \\ y=y_0+\beta t; \end{cases}$$

3) уравнение прямой, заданной двумя точками $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1};$$

4) уравнение прямой в «отрезках»:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

здесь прямая отсекает на осях координат отрезки $a$ и $b$;

5) уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0;y_0)$ и угловым коэффициентом $k$:

$$y-y_0=k(x-x_0);$$

6) уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0;y_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}(a;b)$:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0;$$

7) общее уравнение прямой:

$$Ax+By+C=0,\ A^2+B^2\neq 0.$$

Замечание. Из общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$ можно найти координаты направляющего вектора $\vec{p}(B;-A)$, координаты нормального вектора $\vec{n}(A;B)$, а также угловой коэффициент данной прямой $k=-\dfrac{A}{B}$.

Если прямые заданы своими общими уравнениями $l_1$: $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $l_2$: $A_2x+B_2y+C_2=0$, то их направляющими векторами являются $\vec{p}_1(B_1;-A_1)$ и $\vec{p}_2(B_2;-A_2)$. Тогда *угол между прямыми* вычисляется как угол между их направляющими векторами:

$$\cos(l_1\hat{,}l_2)=\cos(\vec{p}_1\hat{,}\vec{p}_2)=\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{|\vec{p}_1|\cdot|\vec{p}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

*Направленный угол между прямыми* $l_1$: $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $l_2$: $A_2x+B_2y+C_2=0$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}.$$

Если для прямых $l_1$ и $l_2$ известны их угловые коэффициенты $k_1$ и $k_2$, то направленный угол между прямыми $l_1$ и $l_2$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{k_1k_2+1}.$$

Замечания.

1. Если прямые параллельны или совпадают, то их угловые коэффициенты равны:

$$\left[\begin{array}{l} l_1 // l_2, \\ l_1\equiv l_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow\ k_1=k_2.$$

2. Угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых обратны по величине и противоположны по знаку:

$$l_1\perp l_2\ \Leftrightarrow\ k_1\cdot k_2=-1,\ \text{то есть}\ k_1=-\frac{1}{k_2}.$$

*Расстояние от точки* $M_0(x_0;y_0)$ *до прямой* $l$: $Ax+By+C=0$ вычисляется по формуле

$$\rho(M_0,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

*Расстояние между двумя параллельными прямыми* $l_1$: $Ax+By+C_1=0$ и $l_2$: $Ax+By+C_2=0$ вычисляется по формуле

$$\rho(l_1,l_2)=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Решение.

Пусть $ABCD$ – данный квадрат и сторона $BC$ задана уравнением $3x+2y-23=0$. Так как стороны $BC$ и $AD$ параллельны, то уравнение стороны $AD$ можно записать в виде: $3x+2y+C=0$. Найдём расстояние от центра $M(2;2)$ до стороны $BC$:

$$\rho(M,BC)=\frac{|3\cdot 2+2\cdot 2-23|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}.$$

Аналогично, найдём расстояние от центра $M(2;2)$ до стороны $AD$:

$$\rho(M,AD)=\frac{|3\cdot 2+2\cdot 2+C|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|10+C|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13},$$

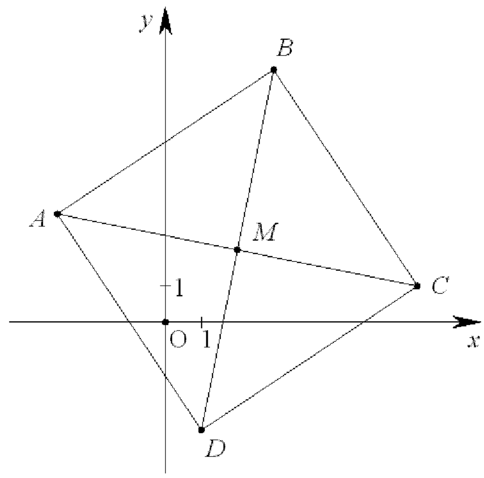
тогда

$$|C+10|=13,$$

$$\left[\begin{array}{l} C+10=13, \\ C+10=-13; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} C=3, \\ C=-23. \end{array}\right.$$

Получили два значения постоянной $C$, причём при $C=-23$ имеем уравнение стороны $BC$, при $C=3$ – уравнение стороны $AD$: $3x+2y+3=0$.

Составим уравнения сторон $AB \parallel CD$. Для этого воспользуемся условием перпендикулярности прямых $AB$ и $BC$. Направляющий вектор $\bar{p}(2;-3)$ прямой $BC$ является нормальным вектором для прямой $AB$. Таким образом, уравнения параллельных сторон $AB$ и $CD$ можно записать в виде




$$2x-3y+C=0.$$

Для определения постоянной $C$ найдём расстояние от центра $M$ квадрата до сторон $AB$ и $CD$:

$$\rho(M, AB) = \frac{|2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + C|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|C - 2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}.$$

Следовательно,

$$|C - 2| = 13,$$

$$\left[\begin{array}{l} C - 2 = 13, \\ C - 2 = -13; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} C = 15, \\ C = -11. \end{array}\right.$$

Получим уравнения сторон:
стороны $AB$: $2x - 3y + 15 = 0$,
стороны $CD$: $2x - 3y - 11 = 0$.

Найдем координаты вершин квадрата.

Так как вершина $A$ является общей точкой сторон $AB$ и $AD$, то её координаты удовлетворяют и уравнению $AB$, и уравнению $AD$. Следовательно, координаты вершины $A$ можно найти, решив систему, составленную из уравнений сторон $AB$ и $AD$:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 15 = 0, \\ 3x + 2y + 3 = 0, \end{cases}$$

откуда $x = -3$, $y = 3$, то есть $A(-3;3)$.

Аналогично, вершина $B$ есть точка пересечения сторон $AB$ и $BC$, то есть её координаты определяются из системы:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 15 = 0, \\ 3x + 2y - 23 = 0, \end{cases}$$

откуда $B(3;7)$.

Для определения координат вершин $C$ и $D$ воспользуемся центром $M$ квадрата. Так как точка $M$ – это точка пересечения диагоналей квадрата, то справедливо $AM = MC$ и $BM = MD$.

Рассмотрим отрезок $AC$. Точка $M$ является его серединой, следовательно, для её координат выполняются равенства:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2}, \ y_M = \frac{y_A + y_C}{2},$$

откуда выразим координаты вершины $C$:

$$x_C = 2x_M - x_A, \ y_C = 2y_M - y_A,$$

то есть $x_C = 2x_M - x_A = 2 \cdot 2 - (-3) = 7$, $y_C = 2y_M - y_A = 2 \cdot 2 - 3 = 1$.

Таким образом, $C(7;1)$.

Рассмотрим отрезок $BD$. Точка $M$ также является его серединой, следовательно, для её координат выполняются равенства:

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2}, \; y_M = \frac{y_B + y_D}{2},$$

откуда определяем координаты вершины $D$:

$$x_D = 2x_M - x_B = 2 \cdot 2 - 3 = 1,$$

$$y_D = 2y_M - y_B = 2 \cdot 2 - 7 = -3,$$

то есть $D(1;-3)$.

*Ответ*: $3x + 2y + 3 = 0$, $2x - 3y + 15 = 0$,
$2x - 3y - 11 = 0$,
$(-3;3)$, $(3;7)$, $(7;1)$, $(1;-3)$.

## Расчётно-графическая работа № 3
## по теме: «Пределы»

Задание 1. Доказать, что функции $u_n$ и $v_n$ являются бесконечно малыми при $n \to \infty$. Сравнить бесконечно малые $u_n$ и $v_n$.

Варианты:

1. $u_n = \dfrac{3n+5}{3n^6 + \frac{1}{n} - 7}$, $v_n = \dfrac{-n^3 + 5n^2}{n^9 + 2}$

2. $u_n = \dfrac{9n^4 + 3n - 1}{7n^8 + 2}$, $v_n = \dfrac{\frac{7}{n} + 3}{3n^2 - 6}$

3. $u_n = \dfrac{2n^2 + 3n + 5}{6n^4 + 2n - \frac{1}{n^2}}$, $v_n = \dfrac{7n}{3n^3 + 2}$

4. $u_n = \dfrac{7n^2 - \frac{9}{n}}{4 + n - n^4 - 6n^3}$, $v_n = \dfrac{\frac{4}{n^5} + 3n^2}{10n^3 - 2}$

5. $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 5}{4n^5 + \dfrac{6}{n} - 1}$, $v_n = \dfrac{6n}{4 - 3n^2}$

6. $u_n = \dfrac{2n^3 + 8}{4n^5 + \dfrac{1}{n^2} + 9}$, $v_n = \dfrac{3n + 7}{6n^3 - 4n}$

7. $u_n = \dfrac{3n^3 - 4}{n - \dfrac{6}{n^3} + 7n^9}$, $v_n = \dfrac{8}{1 - 6n^7}$

8. $u_n = \dfrac{7 - \dfrac{1}{n^2}}{n + 5 - 6n^3}$, $v_n = \dfrac{9 - n^4}{n^5 + 6n^2}$

9. $u_n = \dfrac{\dfrac{4}{n^2} - 1}{2n + 3n^2 + 5}$, $v_n = \dfrac{11n}{6n^3 + 4n}$

10. $u_n = \dfrac{6n - \dfrac{1}{n} + 3n^5}{2n^5 + 3 + 7n^8}$, $v_n = \dfrac{2n + 3n^2}{1 - 8n^6}$

11. $u_n = \dfrac{6n - 3}{n^3 - 2n^4 + n^5}$, $v_n = \dfrac{n - \dfrac{1}{n}}{7 - 2n^3}$

12. $u_n = \dfrac{4n^2 + n}{3n^2 + \dfrac{1}{n^6} + 8n^5}$, $v_n = \dfrac{1}{2n^3 - \dfrac{7}{n^4}}$

13. $u_n = \dfrac{4n + \dfrac{1}{n^3}}{5 - n^3}$, $v_n = \dfrac{5n^2 - 2}{7n - \dfrac{1}{n} + 6n^5}$

14. $u_n = \dfrac{3n^4 + 2n}{7n^7 + 8n^8 - 1}$, $v_n = \dfrac{5n + 3}{4 - n^2 + \dfrac{1}{n^2}}$

15. $u_n = \dfrac{4}{5n^3 + 2n - 3}$, $v_n = \dfrac{3n^4}{\dfrac{7}{n^3} + n^{12} - 1}$

16. $u_n = \dfrac{3n^5 - n}{1 - \dfrac{4}{n^2} + 3n^7}$, $v_n = \dfrac{1 - 5n}{9n^4 + 3n - 8}$

17. $u_n = \dfrac{10n^3 + n^4}{3n^6 - 2}$, $v_n = \dfrac{4}{n + 3n^2 - 5}$

18. $u_n = \dfrac{2n}{9n^5 + 3n - 1}$, $v_n = \dfrac{6n^2 + \dfrac{1}{n}}{27n^6 - 8}$

19. $u_n = \dfrac{n^5 + 2n}{4n + \dfrac{1}{n^3} + 4n^7}$, $v_n = \dfrac{5}{-4 + 6n^4}$

20. $u_n = \dfrac{(n-3)(n+3)}{6n^4 + 3n^2 - 1}$, $v_n = \dfrac{n^2 - n^4}{3n^4 - 5}$

21. $u_n = \dfrac{2n^2+3n-4}{8n^5-\dfrac{1}{n}}$, $v_n = \dfrac{4n^3+1}{\dfrac{2}{n^4}+5n^6}$

22. $u_n = \dfrac{3-n^3}{n^4+2n^5-\dfrac{1}{n^3}}$, $v_n = \dfrac{4n}{1-7n^6}$

23. $u_n = \dfrac{2n^2+3}{n^7+2n-\dfrac{1}{n}}$, $v_n = \dfrac{3n^2-1}{3n^4-\dfrac{2}{n^2}-2}$

24. $u_n = \dfrac{n^3+\dfrac{2}{n}}{3n^2+n-n^5}$, $v_n = \dfrac{3}{4n-3n^2}$

25. $u_n = \dfrac{6n^4-3}{\dfrac{9}{n^3}-n^5}$, $v_n = \dfrac{10}{3n^3-n+2}$

26. $u_n = \dfrac{\dfrac{7}{n}+2n^2}{10n^{10}-8}$, $v_n = \dfrac{7n^2+9}{9n^5+6n-1}$

27. $u_n = \dfrac{n+3n^2-1}{2n^4+\dfrac{1}{n^2}}$, $v_n = \dfrac{5n-n^3}{6n^5+2}$

28. $u_n = \dfrac{5n^6+7}{3n-n^8+2n^3}$, $v_n = \dfrac{2n-5}{4n^5-\dfrac{4}{n^4}}$

29. $u_n = \dfrac{2n+1}{3n^3 - 6n^8 + 2}$, $v_n = \dfrac{5}{3n^3 - \dfrac{1}{n^5}}$

30. $u_n = \dfrac{4n^5 + 3n}{8n^9 - \dfrac{2}{n^3}}$, $v_n = \dfrac{n+4}{6n + \dfrac{1}{n} + 2n^5}$

<u>Задание 2.</u> Найти пределы функций (не пользуясь правилом Лопиталя).

Варианты:

1. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{27x^3 - 1}{3x - 1}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x^2} - 3}{4x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3\sin 5x}$,

   г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{2x+3}$, д) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{e^{x-4} - 1}{x^2 - 6x + 8}$

2. а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2 - 5x + 6}$, б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{3+x} - 2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{8x^2}$,

   г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2 + 6}{2x^2 + 1}\right)^{7x+1}$, д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{2x}$

3. а) $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}} \dfrac{x - \sqrt{5}}{x^4 - 25}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{4 - \sqrt{x+16}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\sin^2 3x}$,

   г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-5}{3x+2}\right)^{x^2+2}$, д) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5^{x-2} - 1}{x^2 - x - 2}$

4. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{x+5}$, б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2\sqrt{x^2+2}+x-4}{x+2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg}2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+10}{4x-1}\right)^{\frac{7}{x+3}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 7x}-1}{\sin 14x}$

5. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^3+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5-\sqrt{25-x^2}}{x^3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x^3}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{9x^2-1}$, д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(2+x)}{x^2+2x+1}$

6. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-6x+8}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-5}-2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^2}{\arcsin^2 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x-6}\right)^{\frac{1}{x^2-3}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\sin x}-1}{\sin^2 x}$

7. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+x^6}{\sqrt{36+x}-6}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}10x}{x(\cos 2x-1)}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+7}{3x+1}\right)^{6x+2}$, д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{x^2-5x+4}$

8. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x-5}$, б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x^2}+x-2}{x+1}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{\sin x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4+x-3}{x^4+x}\right)^{3x^2-9}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^3)}{9x}$

9. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{81+x+x^2}-9}{x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 5x}{x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{6x^2+1}$, д) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2^{x+3}-1}{x^2+5x+6}$

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-5x+4}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 3x}{\mathrm{tg}5x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-3}\right)^{\frac{3}{3x+5}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\arcsin x}-1}{\arcsin^2 x}$

11. а) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{x-\sqrt{2}}{x^4-4}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{7-\sqrt{x^2+49}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3}{\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3-2}{3x^3-1}\right)^{2x^3-5}$, д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\ln(3+x)}{x^2+4x+4}$

12. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+7x+12}{x+3}$, б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{-2x+3}-3}{x+3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\, 7x}{3x^2}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+1}\right)^{\frac{1}{3x^2+5x}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\mathrm{tg}\, x}-1}{3x}$

13. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+4}{x^3+64}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x^5+1}}{10x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\arcsin 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+6}{5x+2}\right)^{3x-7}$, д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{x^4-1}$

14. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+4x+3}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^3+x+2}-1}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{7x^2}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+4}\right)^{7x^2-1}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3\sin^2 x)}{5x^2}$

15. а) $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{x^4-9}{x+\sqrt{3}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{\sqrt{64+5x}-8}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\arcsin^2 6x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x+1}\right)^{x^3-3x}$, д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3^{x-4}-1}{x^2-3x-4}$

16. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$, б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^4-x-2}-4}{x+2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}4x}{\operatorname{tg}7x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{\frac{10}{4x+1}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{5\sin^2 x}$

17. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-125}{x-5}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}-\frac{1}{2}}{x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 9x}{3x^3}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{6x+7-x^3}{6x-x^3}\right)^{x-5}$, д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x-2)}{x^2-6x+9}$

18. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2+3x-18}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+5x+1}-5}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{\operatorname{tg}^2 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{\frac{1}{4x^2+5}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{\sin 2x}-1}{5x}$

19. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^4-16}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{1-\sqrt{x+\dfrac{x^2}{3}+1}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\arcsin 10x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{3x+8}$, д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\sqrt{x}-1}-1}{x-1}$

20. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-6x-7}{x-7}$, б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^3+2}-1}{x+1}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{11x^2}{\operatorname{tg} 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+7+2x}{x^3+2x}\right)^{1-4x^3}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{2\sin x}$

21. а) $\lim\limits_{x\to -0{,}5}\dfrac{x+0{,}5}{8x^3+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10-\sqrt{100-x^2}}{x^7}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x-4}\right)^{6x^2+x}$, д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4^{x+1}-1}{x^2+6x+5}$

22. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-9x+14}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^3+1}-3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\arcsin 7x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+7}{3x-4}\right)^{\frac{1}{4x}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3\operatorname{tg} x}-1}{6x}$

23. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{\sqrt{2}}}\dfrac{16x^4-1}{\sqrt{2}x+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+x^3}{\sqrt{\dfrac{1}{9}+4x}-\dfrac{1}{3}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^3}{\operatorname{tg} 6x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+15}{2x^2+5}\right)^{3x^2-7}$, д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln(x-4)}{x^2-25}$

24. а) $\lim\limits_{x\to -10} \dfrac{x^2+7x-30}{x+10}$, б) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{3x^2-2x+3}-6}{x+3}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2 4x}{x^2}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+3}{4x-5}\right)^{\frac{1}{3x^3+1}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\sin^2 x}-1}{4x^2}$

25. а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{121+3x^2}-11}{5x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x(1-\cos 2x)}{\sin 5x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+3}{4x+1}\right)^{5x-3}$, д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{4x^2}$

26. а) $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{x+6}{x^2+8x+12}$, б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{\sqrt{4x+7}-3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{10x^2}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-9}{x^2-1}\right)^{7x^2+5}$, д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{3\operatorname{tg}^2 x}$

27. а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^4-81}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2-x^4}{1-\sqrt{x+1}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9x}{\operatorname{tg}^2 8x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7x-9}{7x-2}\right)^{x^3+5}$, д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^{\arcsin 3x}-1}{x}$

28. а) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^2-10x+9}{x-9}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\sqrt{1+x^6}-\sqrt{1+x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 8x}{\sin x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x+7}{5x-1}\right)^{\frac{4}{2x-1}}$, д) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{e^{x+2}-1}{x^3+8}$

29. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{5}} \dfrac{5x+1}{125x^3+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9-\sqrt{81+x^5}}{4x+x^3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{3x^3}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x^4+3}{5x^4+2}\right)^{x^5-1}$, д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x^7+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}+6x^7}$

30. а) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x-6}{x^2-7x+6}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{4+x+x^3}-2\sqrt{1+x}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin^2 4x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-7}{2x+3}\right)^{\frac{1}{x^4-3}}$, д) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{8^{x+3}-1}{x^2+5x+6}$

<u>Задание 3.</u> Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность. В случае разрыва функции в некоторой точке $x_0$ вычислить односторонние пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ данной функции в этой точке, установить характер разрыва. Построить схематически график функции.

Варианты:

1. $y=\dfrac{2}{1+4^{\frac{1}{x+1}}}$

2. $y=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ -7^x, & 0<x\le 1, \\ x^2-2x-6, & x>1 \end{cases}$

3. $y=\begin{cases} x^3, & x\le 0, \\ -\sin x, & 0<x\le \pi, \\ 2^{x-\pi}, & x>\pi \end{cases}$

4. $y=-\dfrac{2}{5+9^{\frac{1}{x}}}$

5. $y=-\dfrac{3}{5+2^{\frac{1}{x-6}}}$

6. $y=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x, & x\le -2, \\ \dfrac{1}{x+3}, & -2<x\le 0, \\ \ln x, & x>0 \end{cases}$

7. $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<0, \\ \operatorname{tg} x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

8. $y=\dfrac{11}{4+3^{\frac{1}{x-9}}}$

9. $y=\dfrac{6}{7+5^{-\frac{1}{x+4}}}$

10. $y=\begin{cases} x^2+2x+1, & x\le -1, \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & -1<x<0, \\ 1-x^3, & x\ge 0 \end{cases}$

11. $y=\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{2}, & x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+1, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

12. $y=-\dfrac{3}{7+6^{\frac{1}{x+10}}}$

13. $y=-\dfrac{1}{4+e^{\frac{1}{x-5}}}$

14. $y=\begin{cases} \operatorname{tg} x, & x<0, \\ -\cos x, & 0\le x\le \pi, \\ 1, & x>\pi \end{cases}$

15. $y=\begin{cases}-x^2+1, & x\le 0,\\ 3^x, & 0<x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-1}, & x>1\end{cases}$

16. $y=\dfrac{9}{2+e^{-\frac{1}{x+1}}}$

17. $y=\dfrac{4}{2+3^{\frac{1}{x+7}}}$

18. $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ \sqrt{x}, & 0\le x<4,\\ x^2-8x+18, & x\ge 4\end{cases}$

19. $y=\begin{cases}-x+1, & x\le 1,\\ \ln x, & 1<x\le 2,\\ -\dfrac{1}{x-2}, & x>2\end{cases}$

20. $y=\dfrac{6}{3+4^{\frac{1}{x-2}}}$

21. $y=-\dfrac{5}{9+8^{\frac{1}{x+3}}}$

22. $y=\begin{cases}x^2+2x+4, & x\le -1,\\ -x^2+4, & -1<x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2\end{cases}$

23. $y=\begin{cases}-4x-10, & x\le -2,\\ x^2+4x+2, & -2<x\le 0,\\ 2^x, & x>0\end{cases}$

24. $y=-\dfrac{5}{1+7^{\frac{1}{x+6}}}$

25. $y=\dfrac{7}{1+6^{-\frac{1}{x-2}}}$

26. $y=\begin{cases}-x^2-6x-8, & x\le -2,\\ \dfrac{1}{2}x+2, & -2<x\le 2,\\ \dfrac{3}{2}x, & x>2\end{cases}$

27. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ \sin x+3, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 4, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

28. $y=\dfrac{8}{9+2^{\frac{1}{x}}}$

29. $y=\dfrac{8}{3+e^{\frac{1}{x+2}}}$

30. $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x<-1,\\ x+1, & -1\le x<0,\\ \sin x+1, & x\ge 0\end{cases}$

## ***Решение задач типового варианта***

Задание 1. Доказать, что функции $u_n$ и $v_n$ являются бесконечно малыми при $n\to\infty$. Сравнить бесконечно малые $u_n$ и $v_n$:

$$u_n=\frac{2n^6+3n}{3n^7+2+\dfrac{1}{n^2}},\ v_n=\frac{3}{n+\dfrac{4}{n^4}+2}.$$

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой в точке* $a$ (или при $x\to a$), если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Говорят, что функция $\alpha(x)$ является *бесконечно малой более высокого порядка* по сравнению с функцией $\beta(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то говорят, что функция $\alpha(x)$ является *бесконечно малой более низкого порядка* по сравнению с функцией $\beta(x)$ при $x \to a$.

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$, $c \neq 0, c \in R$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка* при $x \to a$.

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми*, то есть $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Решение.

Найдём пределы данных функций $u_n$ и $v_n$ при $n \to \infty$.

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^6 + 3n}{3n^7 + 2 + \frac{1}{n^2}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right),$$

для того чтобы раскрыть полученную неопределённость, надо разделить и числитель, и знаменатель дроби на $n$ в наивысшей степени, встречающейся в данном выражении, то есть на $n^7$:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2n^6}{n^7} + \frac{3n}{n^7}}{\frac{3n^7}{n^7} + \frac{2}{n^7} + \frac{1}{n^2 \cdot n^7}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^6}}{3 + \frac{2}{n^7} + \frac{1}{n^9}} = \frac{0+0}{3+0+0} = \frac{0}{3} = 0,$$

аналогично получим

$$\lim_{n \to \infty} v_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n + \frac{4}{n^4} + 2} = \frac{3}{\infty + 0 + 2} = \frac{3}{\infty} = 0.$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = 0$, то согласно определению, функции $u_n$ и $v_n$ являются бесконечно малыми при $n \to \infty$.

Для того чтобы сравнить бесконечно малые функции $u_n$ и $v_n$, надо найти предел их отношения при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^6+3n}{3n^7+2+\dfrac{1}{n^2}} : \frac{3}{n+\dfrac{4}{n^4}+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n^6+3n)(n+\dfrac{4}{n^4}+2)}{(3n^7+2+\dfrac{1}{n^2})\cdot 3} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n^7+11n^2+4n^6+\dfrac{12}{n^3}+6n}{3n^7+2+\dfrac{1}{n^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n^7}{n^7}+\dfrac{11n^2}{n^7}+\dfrac{4n^6}{n^7}+\dfrac{12}{n^3\cdot n^7}+\dfrac{6n}{n^7}}{\dfrac{3n^7}{n^7}+\dfrac{2}{n^7}+\dfrac{1}{n^2\cdot n^7}} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{11}{n^5}+\dfrac{4}{n}+\dfrac{12}{n^{10}}+\dfrac{6}{n^6}}{3+\dfrac{2}{n^7}+\dfrac{1}{n^9}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2+0+0+0+0}{3+0+0} = \frac{2}{9}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{2}{9}$, то данные функции $u_n$ и $v_n$ являются бесконечно малыми одного порядка при $n \to \infty$.

*Ответ*: $u_n$ и $v_n$ – бесконечно малые функции одного порядка при $n \to \infty$.

Задание 2. Найти пределы функций (не пользуясь правилом Лопиталя):

$$\text{а) } \lim_{x\to -2}\frac{2x^3+5x^2-x-6}{x^2-3x-10}, \text{ б) } \lim_{x\to 1}\frac{3-\sqrt{x^3+8}}{x-1}, \text{ в) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\arcsin^2 x},$$

$$\text{г) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{3x+7}, \text{ д) } \lim_{x\to 6}\frac{\log_2(x-5)}{x^2-4x-12}.$$

При вычислении предела функции в точке следует подставить в функцию предельное значение. Если при этом получится конечное число или бесконечность, то это значение и является пределом функции. Если получится неопределённость ($\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $(\infty-\infty)$, $(0\cdot\infty)$, $(0^{\infty})$, $(\infty^{0})$, $(0^{0})$, $(1^{\infty})$), то её следует раскрыть.

*Раскрыть неопределённость* – это значит вычислить предел, избавляясь от неопределённости с помощью преобразований, либо доказать, что предел не существует.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^3+5x^2-x-6}{x^2-3x-10}$.

Здесь числитель и знаменатель стремятся к нулю при $x\to-2$:

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^3+5x^2-x-6}{x^2-3x-10}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель, который обращает их в нуль:

$$\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)(2x+3)}{(x+2)(x-5)}=\lim_{x\to-2}\frac{(x-1)(2x+3)}{x-5}=\frac{(-2-1)(-4+3)}{-2-5}=-\frac{3}{7}.$$

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-\sqrt{x^3+8}}{x-1}$.

Числитель и знаменатель данной дроби стремятся к нулю при $x\to1$:

$$\lim_{x\to1}\frac{3-\sqrt{x^3+8}}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое числителю, получим:

$$\lim_{x\to1}\frac{\left(3-\sqrt{x^3+8}\right)\left(3+\sqrt{x^3+8}\right)}{(x-1)\left(3+\sqrt{x^3+8}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{9-(x^3+8)}{(x-1)\left(3+\sqrt{x^3+8}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x^3}{(x-1)\left(3+\sqrt{x^3+8}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(x^2+x+1)}{(x-1)\left(3+\sqrt{x^3+8}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(x^2+x+1)}{3+\sqrt{x^3+8}}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}.$$

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\,5x}{\arcsin^2 x}$.

Здесь также имеем неопределённость:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\arcsin^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

В силу замечательных пределов

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1,$$

функции $\sin x$ и $x$, $\arcsin x$ и $x$, $\operatorname{tg}x$ и $x$, $\operatorname{arctg}x$ и $x$ являются эквивалентными бесконечно малыми при $x\to 0$, то есть $\sin x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\operatorname{tg}x\sim x$, $\operatorname{arctg}x\sim x$. Следовательно, для этих функций применима теорема: *если* $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$ *при* $x\to a$ *и* $\exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$, *то* $\exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

Так как при $x\to 0$ функции $\operatorname{tg}5x$ и $5x$, $\arcsin x$ и $x$ – эквивалентные бесконечно малые ($\operatorname{tg}5x\sim 5x$, $\arcsin x\sim x$), то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\arcsin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(5x)^2}{x^2}=25.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3x+7}$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3x+7}=(1^\infty)$, то воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Выделим целую часть дроби и раскроем неопределённость:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{3x+7}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-1)+6}{2x-1}\right)^{3x+7}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{2x-1}\right)^{3x+7}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{6}\cdot\frac{6}{2x-1}\cdot(3x+7)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6(3x+7)}{2x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{18x+42}{2x-1}}=e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{18x}{x}+\frac{42}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{18+\frac{42}{x}}{2-\frac{1}{x}}}=e^{\frac{18+0}{2-0}}=e^9.$$

д) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\log_2(x-5)}{x^2-4x-12}$.

Здесь имеем неопределённость $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\log_2(x-5)}{x^2-4x-12}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Воспользуемся замечательным пределом

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\log_a e.$$

Разложим знаменатель дроби на множители и приведём данный предел к замечательному пределу:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\log_2(x-5)}{x^2-4x-12}=\lim_{x\to 6}\frac{\log_2\big((x-6)+1\big)}{(x-6)(x+2)}=\log_2 e\cdot\lim_{x\to 6}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{8}\log_2 e.$$

Также имеют место замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

*Ответ*: а) $-\dfrac{3}{7}$; б) $-\dfrac{1}{2}$; в) 25; г) $e^9$; д) $\dfrac{1}{8}\log_2 e$.

Задание 3. Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность. В случае разрыва функции в некоторой точке $x_0$ вычислить односторонние пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ данной функции в этой точке, установить характер разрыва. Построить схематически график функции.

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0$, если предел функции $y=f(x)$ в точке $x_0$ равен значению функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Если функция $y=f(x)$ не является непрерывной в точке $x_0$, то говорят, что в точке $x_0$ функция $f(x)$ *разрывна*, а точка $x_0$ называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Точка $x_0$ разрыва функции $y=f(x)$ называется *точкой разрыва первого рода*, если существуют конечные односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x_0$, то есть $f(x_0-0)\in R$, $f(x_0+0)\in R$.

Точка $x_0$ разрыва первого рода функции $y=f(x)$ называется *точкой устранимого разрыва*, если односторонние пределы функции

$f(x)$ в точке $x_0$ равны между собой, но не равны значению функции $f(x)$ в точке $x_0$, то есть $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$.

Если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке $x_0$ равен $\infty$ или не существует, то точка $x_0$ называется *точкой разрыва второго рода*.

Пример 1. Исследовать функцию $y=\dfrac{12}{3+5^{-\frac{1}{x+6}}}$ на непрерывность.

Решение.

Данная функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x_0=-6$.

Найдём односторонние пределы функции в точке $x_0=-6$:

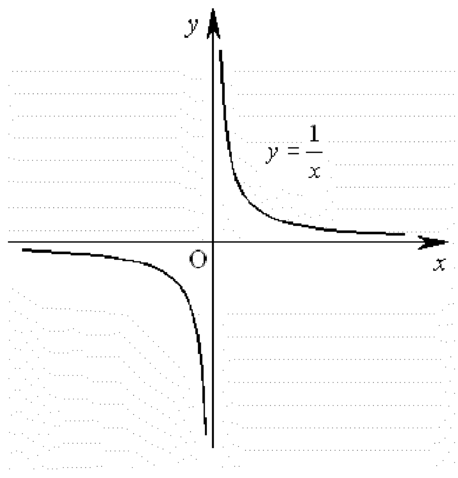
$$f(x_0-0)=f(-6-0)=\lim_{x\to-6-0}\frac{12}{3+5^{-\frac{1}{x+6}}}=\frac{12}{3+5^{-\frac{1}{-6-0+6}}}=\frac{12}{3+5^{-\frac{1}{-0}}}=$$

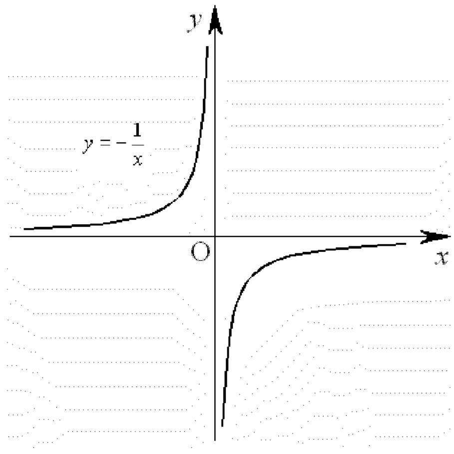
$$=\frac{12}{3+5^{\infty}}=\frac{12}{3+\infty}=\frac{12}{\infty}=0\in R,$$

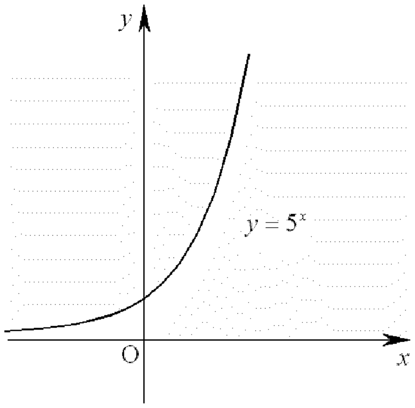
$$f(x_0+0)=f(-6+0)=\lim_{x\to-6+0}\frac{12}{3+5^{-\frac{1}{x+6}}}=\frac{12}{3+5^{-\frac{1}{-6+0+6}}}=\frac{12}{3+5^{-\frac{1}{0}}}=$$

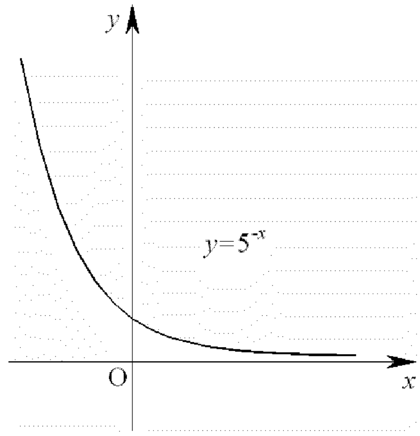
$$=\frac{12}{3+5^{-\infty}}=\frac{12}{3+0}=\frac{12}{3}=4\in R.$$

Так как $f(-6-0)\in R$, $f(-6+0)\in R$ и $f(-6-0)\neq f(-6+0)$, то точка $x_0=-6$ является точкой разрыва первого рода.





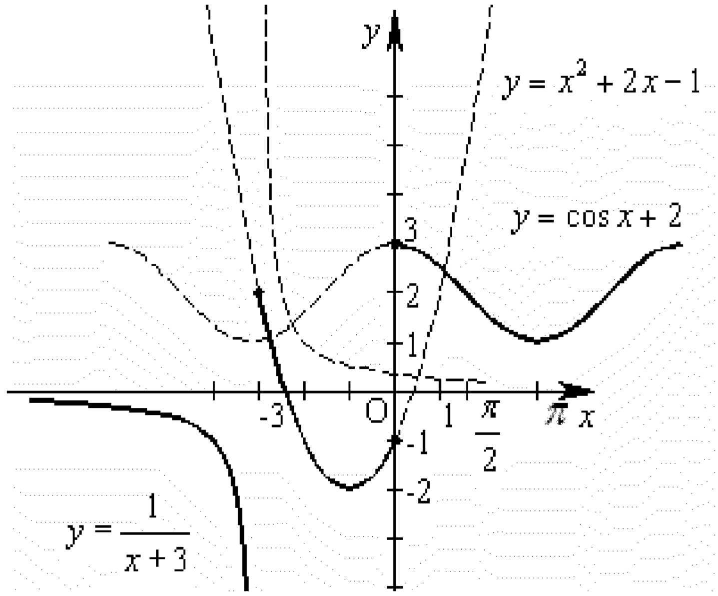




*Ответ*: $x_0 = -6$ – точка разрыва первого рода.

Пример 2. Исследовать функцию $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x+3}, & x < -3, \\ x^2 + 2x - 1, & -3 \le x < 0, \\ \cos x + 2, & x \ge 0 \end{cases}$ на непрерывность.

Решение.

Построим схематически график данной функции. Для этого построим графики её составных частей:




1) $y = \dfrac{1}{x+3}$ при $x < -3$ с помощью сдвига графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ на 3 единицы влево;

2) $y = x^2 + 2x - 1$ при $-3 \le x < 0$:

выделим полный квадрат: $y=(x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2)-1^2-1=(x+1)^2-2$, следовательно, график функции $y=x^2+2x-1$ строим с помощью сдвига графика функции $y=x^2$ на 1 единицу влево и на 2 единицы вниз;

3) $y=\cos x+2$ при $x\geq 0$ с помощью сдвига графика функции $y=\cos x$ на 2 единицы вверх.

Данная функция определена на всей числовой прямой.

На каждом из интервалов $(-\infty;-3)$, $[-3;0)$, $[0;+\infty)$ соответствующие элементарные функции $\frac{1}{x+3}$, $x^2+2x-1$, $\cos x+2$ являются непрерывными.

Исследуем на непрерывность граничные точки $x_1=-3$ и $x_2=0$. Найдём в них односторонние пределы.

$x_1=-3$:

$$f(x_1-0)=f(-3-0)=\lim_{x\to-3-0}y=\lim_{x\to-3-0}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{-3-0+3}=\frac{1}{-0}=-\infty,$$

$$f(x_1+0)=f(-3+0)=\lim_{x\to-3+0}y=\lim_{x\to-3+0}(x^2+2x-1)=$$

$$=(-3+0)^2+2(-3+0)-1=9-6-1=2\in R.$$

Так как $f(-3-0)=-\infty$, то точка $x_1=-3$ является точкой разрыва второго рода.

$x_2=0$:

$$f(x_2-0)=f(0-0)=\lim_{x\to0-0}y=\lim_{x\to0-0}(x^2+2x-1)=-1\in R,$$

$$f(x_2+0)=f(0+0)=\lim_{x\to0+0}y=\lim_{x\to0+0}(\cos x+2)=\cos 0+2=3\in R.$$

Так как $f(0-0)\in R$, $f(0+0)\in R$ и $f(0-0)\neq f(0+0)$, то точка $x_2=0$ является точкой разрыва первого рода.

*Ответ*: $x_1=-3$ – точка разрыва второго рода;
$x_2=0$ – точка разрыва первого рода.

## Расчётно-графическая работа № 4
## по теме: «Производная функции одной переменной»

<u>Задание 1.</u> Найти производную $y'$ сложной функции $y = f(x)$.

Варианты:

1. $y = \sin\dfrac{\ln(10x+3)}{\operatorname{tg}(e^{6x})} + 2x \cdot \sqrt{x^3 - 2x + 1}$

2. $y = (x^{12} - 4) \cdot \operatorname{ctg}(\ln 3x) + \dfrac{2x}{\pi} - \cos^4(2x+1)$

3. $y = 4^{\arcsin\sqrt{x^3+1}} + \dfrac{x^4 - 3\operatorname{tg}(x-9)}{2x - \sqrt[3]{x}}$

4. $y = e^{4-x} \cdot \sqrt{x^5 + 1} - \log_2(\dfrac{1}{x} - \sin^6(5x+11) + 4)$

5. $y = \dfrac{\sqrt[6]{1-2x^4}}{x^3 - x + \pi} + \cos^5(2 + 3^{x-1} + \sqrt{x}) - 7$

6. $y = 6\left(\sin\dfrac{8x - x^7}{2} - \arccos 3x\right)^4 - x \cdot 5^{\ln x}$

7. $y = \sqrt[4]{\dfrac{9+2x}{x^2 - 4x^5}} + e^{3x + \operatorname{tg}\frac{5}{x} - \ln 4}$

8. $y = (2\cos x^7 + 3\ln\sqrt[4]{x}) \cdot 6^x - (\operatorname{ctg}(-x) + x^3 - 2)^3$

9. $y=\log_3(\operatorname{arcctg}\frac{e^x-e^{-5x}}{2x})+\sin^8(x^3+\sqrt{x}-4)$

10. $y=(\operatorname{tg}6x)^{\cos\frac{\pi}{3}}-(3x^9-x+\frac{1}{5x})\cdot\ln x^3$

11. $y=\left(\frac{\sqrt{x^5+3}}{x^3-1}\right)^7+\cos(2-5e^{7x-\frac{1}{2x}})$

12. $y=3(x^3-\sqrt[5]{x})\cdot\arcsin 8x+\ln^4(x^2+2e^{\sqrt{x}}-1)$

13. $y=\frac{(9-x)^4}{x^8-2\sqrt{x}-5}-7^{9x+\sin(2x^5-1)}+2$

14. $y=9^{x^3}\cdot\sin^5(\frac{1}{x}+1)-\ln(\arccos\sqrt{6-x})$

15. $y=e^{4x^2-\operatorname{arctg}2x+\frac{1}{2}\log_5(x+1)}-\frac{x^8-2x+1}{3\sqrt[4]{x-3}}$

16. $y=\ln(\sin 2x)\cdot\arccos(8^{x^3})+\frac{1}{x}-\sqrt[4]{1-x^2+e}$

17. $y=\operatorname{tg}\frac{\log_9(x^5-4)}{e^{x-\frac{1}{2x}-3}}+\sqrt{x^{11}-x+4}$

18. $y=(3x^2+5x)\cdot\cos(\ln\frac{2}{x})+\sqrt[7]{x}-\sin^{14}(x-8e^x)$

19. $y=6^{\arccos(e^{2x-10})}+\dfrac{3x^3+\operatorname{ctg}x}{x-\sqrt[5]{1+x}}$

20. $y=e^{3x+2}\cdot\sqrt{x+x^4}-2\log_6(\dfrac{1}{x^3}+\cos^2(-x+1)+7)$

21. $y=\dfrac{\sqrt[7]{x^5+4}}{x^2-2x+1}+\sin^6(5-9^{-x-6}+x\sqrt{x})$

22. $y=(2-x)\cdot 10^{\ln 3x}+6(\arcsin 5x-\arccos 3x)^7$

23. $y=\sqrt[3]{\dfrac{9x^3+2-x}{-x^2}}+e^{x+\operatorname{ctg}\frac{5}{x^4}-\ln 1}$

24. $y=(2\sin x^4-8\ln\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}})\cdot 10^{-x}+(x^2-20+\operatorname{tg}\dfrac{1}{x})^5$

25. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-e^{3-5x}}{x^5+1}+\cos^3(\dfrac{1}{4x}+\sqrt{3x}-4)$

26. $y=(\operatorname{ctg}2x)^{\sin\frac{\pi}{6}}+(3x^4-2x+\dfrac{1}{5x^2})\cdot\ln(x^3+1)$

27. $y=\left(\dfrac{\ln(3x-1)}{x^3-x}\right)^4-\sin(1-3e^{\sqrt{x}-\frac{1}{x}+2})$

28. $y=3(\dfrac{2}{x^{13}}-\sqrt[4]{2x})\cdot\arccos(x-1)+\ln^3(x^2+2e^{\frac{1}{x}}-\pi)$

29. $y = \dfrac{(x-2)^6}{x^3 + 12\sqrt{x}} + 3^{x + \cos(2x^{15} - 4) + 1}$

30. $y = 2^{x^2} \cdot \sin^7(-\dfrac{4}{x} + x) + \log_5(\arcsin\sqrt{7 - x^2})$

<u>Задание 2.</u> Найти производную $y'_x$ параметрически заданной функции $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Варианты:

1. $x = 2\sin^4 t + t^3, \quad y = -t + 3\cos^2 3t$

2. $x = t^2 - \dfrac{1}{t}, \quad y = t^4 + \sqrt{t}$

3. $x = 7(t - \sin^5 t), \quad y = 7(1 - \cos^2 t) + t$

4. $x = 2t^3 - 8t, \quad y = \sqrt{t^3} - t^2$

5. $x = 3\sin^3 2t, \quad y = 3\cos^2 t$

6. $x = \dfrac{1 + t^2}{t}, \quad y = \dfrac{6t^3 + t^6}{t}$

7. $x = t \cdot \cos t - 4t, \quad y = \sin^3 2t + t^2$

8. $x = \dfrac{2}{t^2} - 3t^7, \quad y = \sqrt{t} - t$

9. $x = 5t + \cos^2(t-4), \quad y = 1 + \sin\sqrt{t}$

10. $x = \dfrac{1-3t^2}{t^2}, \quad y = \dfrac{-t^2 + t^3}{\sqrt{t}}$

11. $x = 2\,\mathrm{tg}t, \quad y = 2\sin^5 t + \cos t$

12. $x = 2t^2 - \dfrac{1}{t^3}, \quad y = t^4 - \sqrt[3]{t}$

13. $x = e^{4t} + t\cos t, \quad y = e^t + \sin t$

14. $x = t^7 - \dfrac{\sqrt{t}}{t}, \quad y = t^2 + \sqrt{t^3}$

15. $x = \sin^3 2t - t^4, \quad y = 2 - t + \cos^4 t$

16. $x = t^4 - 2t, \quad y = 5\sqrt{t} - t^3$

17. $x = \sin^5 t, \quad y = 2\cos 7t$

18. $x = \dfrac{t - t^3}{\sqrt{t}}, \quad y = \dfrac{6t + t^{0.5}}{t}$

19. $x = 2\cos^2 t + t, \quad y = t \cdot \sin 2t + t$

20. $x = \dfrac{2t}{5} - 3t^3, \quad y = \dfrac{\sqrt{t}}{t^2} - 3t$

21. $x = t - \cos(3t+1), \quad y = 4 + \sin^3 \sqrt{2t}$

22. $x = \dfrac{t + 6t^4}{t^3}, \quad y = \dfrac{-t + t^2}{\sqrt{t}}$

23. $x = 3\,\mathrm{ctg}\,2t, \quad y = \sin^2 t - \cos(-t)$

24. $x = t^5 + \dfrac{1}{t^{0.5}}, \quad y = t^2 - \sqrt[4]{t^3}$

25. $x = 2^t - t\cos 2t, \quad y = e^t + \sin t^2$

26. $x = 4t^3 + \dfrac{1}{\sqrt{t}}, \quad y = t^3 + \sqrt{1-t}$

27. $x = 3t - \sin^2 t, \quad y = 5(t + \cos^6 t)$

28. $x = 2t^5 - t\sqrt{t}, \quad y = \sqrt{t^4} + t$

29. $x = \sin^3(4t+1), \quad y = 7\cos t^3$

30. $x = \dfrac{1 - t^3}{3t}, \quad y = \dfrac{t^2 - t^7}{t}$

Задание 3. Найти производную $y'$ неявно заданной функции $F(x; y) = 0$.

Варианты:

1. $2y^3 - xy^2 + \cos y + x^3 - 1 = 0$

2. $\sin(x-4y)+x^3y^2-4-y=0$

3. $x^2y^3-x^5-y^3+5y\ln x=7$

4. $\cos(4xy)+\ln(-y)+5^{2x}-y^2=0$

5. $x^3y-y^3+e^{6y}-xy^2+5=0$

6. $3x\cdot \mathrm{tg}y-xy^4+4(x+y)-2=0$

7. $x\cdot\sin y+3^x\cdot y-x^2+1=0$

8. $7^x\cdot y-\ln(x+y)+xy^5=0$

9. $9^y-\cos x\sin y-x^2-y^2-3=0$

10. $4^{x-y}\cdot\sin(2x+y)+2y^3+\dfrac{1}{x}=0$

11. $y^4+2x+y^3+\sin y-x^2+3=0$

12. $\cos(3x+y^2)+xy-4x-\dfrac{1}{y}=0$

13. $x^3y^2+\sqrt{x}-y^5-y\ln 6=1$

14. $\operatorname{tg}(x-y)+\log_2 y+4^x-\sqrt{y}=0$

15. $xy^3-y^{\frac{1}{3}}+e^{2y+1}+y+7=0$

16. $y\cdot\operatorname{ctg}(y+1)-x^2y^4+4x-9=0$

17. $x^2\cdot\cos y+2^y\cdot x-x=0$

18. $8^x\cdot(2y-1)-\ln(-x+y^2)+x^2y^3=0$

19. $3^{2y}-\cos y\sin x-x^3+y-2=0$

20. $6^{-y}\cdot(x+3y)-2y^7+\dfrac{1}{y^2}=0$

21. $8y^2+xy-\sin(3y)+\sqrt{x}-10=0$

22. $\operatorname{tg}(x^3-y)+xy^3-4x+y=0$

23. $4(xy)^3-y^5-x^3+5\ln x^2=1$

24. $\cos^2(4x+y)-\dfrac{1}{y-7}+3^x-y^2=0$

25. $x^4y-\dfrac{y}{x}+e^{y-1}+y^2+6=0$

26. $7y\cdot \operatorname{tg} x+(x-2)y^5+y-2x=0$

27. $x\cdot \sin(3y+1)+3^y-x^2y+11=0$

28. $2^{x+6}\cdot (y-2)+\ln(x^2+y^2)+xy^3=0$

29. $7^{y+x}-\operatorname{ctg} x\sin y+\dfrac{x}{y}-3=0$

30. $\ln x\cdot \cos(x-6y)+y^2+\dfrac{y}{x}=0$

Задание 4. Найти производную $y'$ показательно-степенной функции $y=f(x)^{g(x)}$ (логарифмическое дифференцирование).

Варианты:

1. $y=x^{2x-1}\cdot \sin^2 x$

2. $y=[\cos(x^3-2x-1)]^{-x^2+x}$

3. $y=[\cos(x^2-x+2)]^{\sin 4x}$

4. $y=[\operatorname{tg}(2x-x^4)]^{\frac{1}{x}}\cdot \cos 2x$

5. $y=x^{\sin 7x}\cdot \dfrac{x^5+2x-1}{2+x^4}$

6. $y=[\arcsin\sqrt{x}]^{\cos x}\cdot (3x^2+1)$

7. $y = [\cos(x^3 - 3)]^{\ln 3x} \cdot (\frac{1}{x} + e^x)$

8. $y = \left( \dfrac{\mathrm{tg}(x^2 - 2^x)}{4 - x} \right)^{\sin x}$

9. $y = [(x^2 - 5) \cdot e^{x^3} \cdot \cos x]^{2x}$

10. $y = \left( \dfrac{\cos 6^x}{1 - x^4 + 4x} \right)^{\sin 5x}$

11. $y = (2x)^x \cdot \cos^3(1 - x)$

12. $y = [\sin(x^7 - x^3 - 8)]^{x - x^2 + 1}$

13. $y = [\cos(x^3 - x + 5^x)]^{\mathrm{ctg} x}$

14. $y = [\sin(x^2 - 3)]^{\frac{1}{x}} \cdot \mathrm{tg}\, 2x$

15. $y = x^{\cos(9x-1)} \cdot \dfrac{x^4 + x - 3^x}{(x + 6)^2}$

16. $y = [\arccos(2x + 5)]^{\sin x} \cdot (x^3 + x)$

17. $y = [\sin(x^2 - 3^x)]^{\ln x} \cdot (\sqrt{x} - e^{2x})$

18. $y = \left( \dfrac{\mathrm{tg}(x - \ln x)}{x^5} \right)^{\cos x}$

19. $y=[(x^4-x)\cdot e^x\cdot\sin 2x]^{x^2+1}$

20. $y=\left(\dfrac{\sin(9^x+1)}{x^3+x-4}\right)^{\cos(1-x)}$

21. $y=(x^7+2x-5)^x\cdot\operatorname{tg}^2 x$

22. $y=[\cos(x^2-x+3)]^{\sqrt{x}-x+1}$

23. $y=[\sin(x^3-\dfrac{1}{x}-e^x)]^{\operatorname{tg}x}$

24. $y=[\cos(-x^3-3\pi)]^{\sqrt[5]{x}}\cdot\sin x^2$

25. $y=x^{\operatorname{tg}4x}\cdot\dfrac{(x-7^{2x})^3}{3x+1}$

26. $y=[\operatorname{arctg}\sqrt{x}]^{x-6}\cdot(x^2+3)^7$

27. $y=[\cos(x-5\sqrt{x})]^{\log_4 x}\cdot x^5\cdot e^{6x}$

28. $y=\left(\dfrac{\sin^3(1-x)\cdot(x^2+\ln x)}{x^2}\right)^{\operatorname{tg}x}$

29. $y=[(3x^3-2x+1)\cdot\cos^2 x]^{x^6+x}$

30. $y=\left(\dfrac{\sin^3(x+1)}{x^4+x^2-5}\right)^{e^{3x+2}}$

## *Решение задач типового варианта*

Приведём *таблицу производных*, которая содержит производные от основных элементарных функций:

1. $(c)' = 0$, $c = const$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
5. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
6. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
7. $\left(e^x\right)' = e^x$
8. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
9. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$
10. $(\sin x)' = \cos x$
11. $(\cos x)' = -\sin x$
12. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
13. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
14. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
17. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Имеют место следующие *правила дифференцирования*:

1) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $c = const$;
2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Задание 1. Найти производную $y'$ сложной функции:

$$y = e^{\sin(2x+4)+x^5} \cdot \operatorname{arctg} 3x - \cos^3\left(\ln(2x^6 + 3x + 1)\right) \text{ (функция } y = f(x)).$$

Решение.

$$y' = e^{\sin(2x+4)+x^5} \cdot (2\cos(2x+4) + 5x^4) \cdot \operatorname{arctg} 3x + e^{\sin(2x+4)+x^5} \cdot \frac{3}{1+9x^2} -$$

$$-3\cos^2\left(\ln(2x^6 + 3x + 1)\right) \cdot \left(-\sin\left(\ln(2x^6 + 3x + 1)\right)\right) \cdot \frac{12x^5 + 3}{2x^6 + 3x + 1} =$$

$$= e^{\sin(2x+4)+x^5} \cdot (2\cos(2x+4) + 5x^4) \cdot \operatorname{arctg} 3x + e^{\sin(2x+4)+x^5} \cdot \frac{3}{1+9x^2} +$$

$$+9\cos^2\left(\ln(2x^6 + 3x + 1)\right) \cdot \sin\left(\ln(2x^6 + 3x + 1)\right) \cdot \frac{4x^5 + 1}{2x^6 + 3x + 1}.$$

*Ответ*: $y' = e^{\sin(2x+4)+x^5} \cdot (2\cos(2x+4) + 5x^4) \cdot \operatorname{arctg} 3x +$

$$+ e^{\sin(2x+4)+x^5} \cdot \frac{3}{1+9x^2} +$$

$$+9\cos^2\left(\ln(2x^6 + 3x + 1)\right) \cdot \sin\left(\ln(2x^6 + 3x + 1)\right) \cdot \frac{4x^5 + 1}{2x^6 + 3x + 1}.$$

Задание 2. Найти производную $y'_x$ параметрически заданной функции:

$$x = 3t^4 - \sin 2t, \quad y = 2\cos^4(5t+3) \text{ (функция } x = x(t),\ y = y(t)).$$

Если функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то производная $y'_x$ находится по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Решение.

Найдём производные от функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ по переменной $t$:

$x'_t = 12t^3 - 2\cos 2t$,

$y'_t = 8\cos^3(5t+3) \cdot (-\sin(5t+3)) \cdot 5 = -40\sin(5t+3)\cos^3(5t+3)$.

Тогда производная данной функции $y = f(x)$ равна

$$y'_x = \frac{-40\sin(5t+3)\cos^3(5t+3)}{2(6t^3 - \cos 2t)} = \frac{-20\sin(5t+3)\cos^3(5t+3)}{6t^3 - \cos 2t}.$$

*Ответ*: $y'_x = \dfrac{-20\sin(5t+3)\cos^3(5t+3)}{6t^3 - \cos 2t}$.

Задание 3. Найти производную $y'$ неявно заданной функции:

$$\ln(2y^4) - \sin(3xy) + 5^x + y^3 = 0 \text{ (функция } F(x;y) = 0\text{)}.$$

*Правило*: для вычисления производной неявной функции надо продифференцировать обе части уравнения, задающего эту функцию, считая, что $y$ зависит от $x$, то есть $y = y(x)$. Затем из полученного (после дифференцирования) уравнения надо выразить $y'(x)$.

Производная неявной функции выражается через переменную $x$ и функцию $y$.

Решение.

$$\frac{1}{2y^4} \cdot 8y^3 \cdot y' - \cos(3xy) \cdot 3 \cdot (x' \cdot y + x \cdot y') + 5^x \cdot \ln 5 + 3y^2 \cdot y' = 0,$$

$$\frac{4}{y} \cdot y' - 3\cos(3xy) \cdot (y + x \cdot y') + 5^x \cdot \ln 5 + 3y^2 \cdot y' = 0,$$

$$\frac{4}{y} \cdot y' - 3y \cdot \cos(3xy) - 3x \cdot y' \cos(3xy) + 5^x \cdot \ln 5 + 3y^2 \cdot y' = 0,$$

$$y'\left(\frac{4}{y} - 3x \cdot \cos(3xy) + 3y^2\right) - 3y \cdot \cos(3xy) + 5^x \cdot \ln 5 = 0,$$

$$y' = \frac{3y \cdot \cos(3xy) - 5^x \cdot \ln 5}{\frac{4}{y} - 3x \cdot \cos(3xy) + 3y^2} = \frac{3y^2 \cdot \cos(3xy) - 5^x \cdot y \cdot \ln 5}{4 - 3xy \cdot \cos(3xy) + 3y^3}.$$

*Ответ*: $y' = \dfrac{3y^2 \cdot \cos(3xy) - 5^x \cdot y \cdot \ln 5}{4 - 3xy \cdot \cos(3xy) + 3y^3}$.

Задание 4. Найти производную $y'$ показательно-степенной функции (логарифмическое дифференцирование):

$$y=\left(\frac{2x^2-1}{\ln x}\right)^{e^{x+3}} \quad \text{(функция } y=f(x)^{g(x)}\text{)}.$$

*Логарифмическим дифференцированием* называют приём дифференцирования, при котором производная от заданной функции отыскивается с помощью производной от её логарифма.

Это значит, что если дана функция $y=f(x)$, то для нахождения её производной сначала логарифмируют эту функцию: $\ln y=\ln f(x)$, затем дифференцируют полученное равенство:

$$\frac{y'}{y}=[\ln f(x)]',$$

откуда

$$y'=y\cdot[\ln f(x)]'.$$

При логарифмическом дифференцировании удобно применять свойства логарифмов:

$$\log_a 1=0,\ \log_a a=1,\ a^{\log_a x}=x,$$

$$\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2,\ \log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2,$$

$$\log_a x^n=n\log_a x.$$

Решение.

Прологарифмируем данную функцию

$$\ln y=\ln\left(\left(\frac{2x^2-1}{\ln x}\right)^{e^{x+3}}\right),$$

$$\ln y=e^{x+3}\cdot\left(\ln(2x^2-1)-\ln(\ln x)\right).$$

Дифференцируем полученное равенство:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=e^{x+3}\cdot\left(\ln(2x^2-1)-\ln(\ln x)\right)+e^{x+3}\cdot\left(\frac{4x}{2x^2-1}-\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right).$$

Откуда

$$y'=\left(\frac{2x^2-1}{\ln x}\right)^{e^{x+3}}\cdot e^{x+3}\cdot\left(\ln\frac{(2x^2-1)}{\ln x}+\frac{4x}{2x^2-1}-\frac{1}{x\ln x}\right).$$

*Ответ*: $y' = \left(\dfrac{2x^2-1}{\ln x}\right)^{e^{x+3}} \cdot e^{x+3} \cdot \left(\ln\dfrac{(2x^2-1)}{\ln x} + \dfrac{4x}{2x^2-1} - \dfrac{1}{x\ln x}\right).$

## Расчётно-графическая работа № 5
## по теме «Дифференциальное исчисление
## функции двух переменных»

Задание 1. Найти частные производные первого $z'_x$, $z'_y$ и второго $z''_{xx}$, $z''_{xy}$, $z''_{yy}$, $z''_{yx}$ порядков функции двух переменных $z = f(x;y)$.

Варианты:

1. $z = \cos(3x^2 + xy) + \sqrt{x^2 + 3y} + 7x$

2. $z = \log_3\left(\sin(x \cdot y^2)\right) - \mathrm{tg}(3x - y) - 31y$

3. $z = 6 - e^{\sin\sqrt{x+2y}} + x^3y^2 - 2y + 34$

4. $z = 4\,\mathrm{tg}(x \cdot y) + 25 - \ln\left(\sin(5x + y)\right) + 3x - 2y$

5. $z = \cos^3\left(y^4 - x\right) + 5^{2x\cdot y} - 10x + y - 26$

6. $z = 43 + (4x^2 - 3y)^3 - y \cdot 2^{\ln x} + x - 5y$

7. $z = 3 + \sqrt[4]{3x - y^3} + \mathrm{ctg}(5xy) + 4x - 3y$

8. $z = 2\cos(x + y) - 8 + e^{x^2y^2} + 3x - 5y$

9. $z = \lg\left(\dfrac{y}{x}\right) + x^3 + \sqrt{y} + 5 - 24x + 7y$

10. $z = \operatorname{tg}(6x + 2y) - 3 + x^4 \cdot \ln y + x - 3y$

11. $z = \sin^2(xy) - e^{3x-y} + 6x - 4y$

12. $z = y \cdot \arcsin 3x + \ln(x^2 + e^y) - 12 + 5x - 8y$

13. $z = y^{2x} + 27 - 6x^4 y^2 + 9x - 15y$

14. $z = 2y \cdot \sin^5 x - \ln(2x + 3y) - 4x - 6y + 36$

15. $z = e^{5x^2 - 3y} - \dfrac{y - 2x}{x + y} + 35 - 51x - 23y$

16. $z = \sin(2x - 4y) + \dfrac{1}{xy} - 5x^4 y^3 - 18 + 3x - 14y$

17. $z = 16 + x \operatorname{tg} 3y + \sqrt{x^3 - y} - 11x + 24y$

18. $z = 43 - 5x^2 y + \cos\left(\dfrac{y}{x}\right) + \sqrt[3]{x} - 8e^y$

19. $z = 3y + 2x^4 - \operatorname{ctg}(3xy) + \dfrac{4x^2 + y}{x - y} + 23$

20. $z = e^{x+2y} - 2\cos^2(y - x) + 7x^2 + \dfrac{1}{3} y^6 - 14$

21. $z = \dfrac{xy}{x^2 + y} + \sin(5 - xy) + \sqrt[5]{x^3} - 7y^3 + 16$

22. $z = 5 + 3xy \cdot e^{3y} + \sin(5x - 2y) - 6x^5 + \sqrt[7]{4y}$

23. $z=\sqrt[4]{\dfrac{x^3}{y}}+\operatorname{arcctg}(xy)-19x+7y-15$

24. $z=2\sin\left(x^4\cdot y\right)-5\ln y+7x^2-20+\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$

25. $z=\operatorname{tg}(2xy)+\sin^4(x-2y)+\sqrt{6y}-4x^7+32$

26. $z=27+7x^{\frac{4}{5}}-6y^2+\dfrac{y-1}{5x^2}-\ln(x^3+y^2)$

27. $z=3\ln(2xy)-\sin(xy-2)-16+x^8-\sqrt[5]{y^2}$

28. $z=\dfrac{y}{\sin x}-\sqrt[6]{xy}-\cos(3x+2)+\ln y+5x-36$

29. $z=\dfrac{x-y}{\sqrt{x}}+\ln(2x+5y)-6x^{2,5}-\dfrac{4}{y^5}+29$

30. $z=y\cdot\sin(y+x)+\sqrt{y^2-x^2}+34-3x^5+\sqrt[3]{y^4}$

Задание 2. Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z=f(x;y)$.

Варианты:

1. $z=x^3+y^3-3xy+12$

2. $z=4x-4y-x^2-y^2-6$

3. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$

4. $z=5x^2-3xy+y^2-10$

5. $z=-2x-2y+x^2+y^2+4$

6. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2 - 3$

7. $z = 12x - 8y + 3x^2 + 2y^2 + 5$

8. $z = 3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 8$

9. $z = 15x - xy - 2x^2 - 2y^2 - 14$

10. $z = 6x - xy - x^2 - y^2 + 7$

11. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y - 6$

12. $z = 2x^3 + 3y^2 - 6xy + 17$

13. $z = x^2 + y^2 + xy + x - y + 14$

14. $z = 7 - x^2 - y^2 + 4x - 4y$

15. $z = 1 + x^2 + xy + y^2 - 6x - 3y$

16. $z = 3 + x^2 + 2y^2 + 4x$

17. $z = x^2 + y^2 - 10x + 6y + 2$

18. $z = 2 + 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 28y$

19. $z = xy + 2x^2 + y^2 + 7x + 3$

20. $z = 12xy - x^2y - xy^2 - 1$

21. $z = xy - x^2 - y^2 + 8$

22. $z = 2xy - 4x^2 - 5y^2 + 38x$

23. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 17$

24. $z = xy + x^2 - y - 2x + y^2 - 3$

25. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$

26. $z = 4 - 3x^2 - y^2 + 6x - 6y$

27. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 3y - 2$

28. $z = x^2 + xy + y^2 + 4x - y + 5$

29. $z = 6xy - x^2y - xy^2 + 3$

30. $z = -xy + x^2 + y + x + y^2 - 1$

## ***Решение задач типового варианта***

Задание 1. Найти частные производные первого $z'_x$, $z'_y$ и второго $z''_{xx}$, $z''_{xy}$, $z''_{yy}$, $z''_{yx}$ порядков функции двух переменных $z = f(x;y)$:

$$z = 4\sin\left(y^5 - x^2\right) + e^{3x\cdot y} + 5\sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{y} + 6.$$

*Частной производной* функции нескольких переменных по какой-нибудь переменной называется обычная производная данной функции по этой переменной, при этом другие переменные считаются фиксированными (постоянными).

Частные производные функций нескольких переменных находятся по формулам и правилам дифференцирования функций одной переменной.

Примечание. Если частные производные $z''_{xy}$ и $z''_{yx}$ второго порядка непрерывны, то они равны ($z''_{xy} = z''_{yx}$).

Решение.

Чтобы найти частную производную $z'_x$ функции двух переменных $z = f(x;y)$, нужно в выражении $f(x;y)$ второй аргумент $y$ принять за постоянную и дифференцировать $f(x; y)$ как функцию одной переменной $x$:

$$z'_x = 4\cos\left(y^5 - x^2\right)\cdot(-2x) + 3y\cdot e^{3x\cdot y} + 5\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= -8x\cdot\cos\left(y^5 - x^2\right) + 3y\cdot e^{3x\cdot y} + \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}.$$

При дифференцировании по $y$ за постоянную принимается аргумент $x$:

$$z'_y = 4\cos\left(y^5 - x^2\right)\cdot 5y^4 + 3x\cdot e^{3x\cdot y} + 7y^{-2} =$$

$$= 20y^4\cdot\cos\left(y^5 - x^2\right) + 3x\cdot e^{3x\cdot y} + 7y^{-2}.$$

Найдём частные производные второго порядка $z''_{xx}$, $z''_{xy}$, $z''_{yy}$, $z''_{yx}$:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = -8\cos\left(y^5 - x^2\right) + 8x\cdot\sin\left(y^5 - x^2\right)\cdot(-2x) +$$

$$+ 3y\cdot 3y\cdot e^{3x\cdot y} + \frac{10}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} =$$

$$= -8\cos\left(y^5 - x^2\right) - 16x^2\cdot\sin\left(y^5 - x^2\right) + 9y^2\cdot e^{3x\cdot y} - \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}};$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = 8x\cdot\sin\left(y^5 - x^2\right)\cdot 5y^4 + 3e^{3x\cdot y} + 3y\cdot 3x\cdot e^{3x\cdot y} =$$

$$= 40xy^4\cdot\sin\left(y^5 - x^2\right) + 3e^{3x\cdot y} + 9xy\cdot e^{3x\cdot y};$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = 20\cdot 4y^3\cdot\cos\left(y^5 - x^2\right) + 20y^4\cdot\left(-\sin\left(y^5 - x^2\right)\right)\cdot 5y^4 +$$

$$+ 3x\cdot 3x\cdot e^{3x\cdot y} - 14y^{-3} =$$

$$= 80y^3\cdot\cos\left(y^5 - x^2\right) - 100y^8\cdot\sin\left(y^5 - x^2\right) + 9x^2\cdot e^{3x\cdot y} - 14y^{-3};$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = 20y^4\cdot\left(-\sin\left(y^5 - x^2\right)\right)\cdot(-2x) + 3e^{3x\cdot y} + 3x\cdot 3y\cdot e^{3x\cdot y} =$$

$$= 40xy^4\cdot\sin\left(y^5 - x^2\right) + 3e^{3x\cdot y} + 9xy\cdot e^{3x\cdot y}.$$

Заметим, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

*Ответ*: $z'_x = -8x\cdot\cos\left(y^5 - x^2\right) + 3y\cdot e^{3x\cdot y} + \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$;

$z'_y = 20y^4\cdot\cos\left(y^5 - x^2\right) + 3x\cdot e^{3x\cdot y} + 7y^{-2}$;

$$z''_{xx}=-8\cos\left(y^5-x^2\right)-16x^2\cdot\sin\left(y^5-x^2\right)+9y^2\cdot e^{3x\cdot y}-\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}};$$
$$z''_{xy}=z''_{yx}=40xy^4\cdot\sin\left(y^5-x^2\right)+3e^{3x\cdot y}+9xy\cdot e^{3x\cdot y};$$
$$z''_{yy}=80y^3\cdot\cos\left(y^5-x^2\right)-100y^8\cdot\sin\left(y^5-x^2\right)+9x^2\cdot e^{3x\cdot y}-14y^{-3}.$$

<u>Задание 2</u>. Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z=f(x;y)$:

$$z=xy-x^3-\frac{1}{2}y^2+1.$$

*Необходимое условие экстремума*: если функция $z=f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ экстремум и в этой точке существуют частные производные $z'_x$, $z'_y$, то все эти частные производные в точке $M_0(x_0;y_0)$ равны нулю:

$$z'_x(x_0;y_0)=0,\ z'_y(x_0;y_0)=0.$$

*Достаточное условие экстремума*: пусть функция $z=f(x;y)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядков в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ и удовлетворяет условиям:

$$z'_x(x_0;y_0)=0,\ z'_y(x_0;y_0)=0;$$

обозначим: $A=z''_{xx}(x_0;y_0)$, $B=z''_{xy}(x_0;y_0)$, $C=z''_{yy}(x_0;y_0)$ и $\Delta=AC-B^2$, тогда

1) если $\Delta>0$, то в этой точке $M_0$ функция $z=f(x;y)$ имеет экстремум, причём максимум при $A<0$ и минимум при $A>0$;

2) если $\Delta<0$, то в этой точке $M_0$ функция $z=f(x;y)$ экстремума не имеет.

<u>Замечание</u>. В случае $\Delta=0$ функция либо имеет экстремум, либо не имеет. Этот случай называется неопределённым и требует дополнительного исследования.

Решение.

1) Находим стационарные точки, то есть точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума. Для этого вычисляем частные производные первого порядка:

$$z'_x = y - 3x^2,\ z'_y = x - y.$$

Приравнивая найденные частные производные $z'_x$, $z'_y$ первого порядка нулю, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y - 3x^2 = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

из которой определяем стационарные точки данной функции: $M_1(0;0)$, $M_2\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

2) Проверим выполнение достаточных условий экстремума в каждой точке. Для этого найдём частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = -6x,\ z''_{xy} = 1,\ z''_{yy} = -1.$$

Для точки $M_1(0;0)$ имеем:

$$A = z''_{xx}(M_1) = 0,\ B = z''_{xy} = 1,\ C = z''_{yy} = -1.$$

Так как

$$\Delta = AC - B^2 = -1 < 0,$$

то экстремума в этой точке нет.

Для точки $M_2\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ имеем:

$$A = z''_{xx}(M_2) = -2,\ B = z''_{xy} = 1,\ C = z''_{yy} = -1.$$

Так как

$$\Delta = AC - B^2 = 1 > 0 \text{ и } A < 0,$$

то в точке $M_2$ – локальный максимум.

Вычислим значение функции в этой точке $z_{\max} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{17}{27}$.

*Ответ*: $z_{\max}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = \frac{17}{27}$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Атанасян Л. С.* Геометрия. Ч. 1 / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – М. : Просвещение, 1986. – 336 с.

2. *Баврин И. И.* Высшая математика / И. И. Баврин. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2005. – 616 с.

3. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. Решение типичных и трудных задач / Г. Н. Берман. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2007. – 608 с.

4. *Виленкин Н. Я.* Задачник по курсу математического анализа. Ч. 1 / Н. Я. Виленкин, К. А. Бохан, И. А. Марон, И. В. Матвеев, М. Л. Смолянский, А. Т. Цветков. – М. : Просвещение, 1971. – 343 с.

5. *Виленкин Н. Я.* Задачник по курсу математического анализа. Ч. 2 / Н. Я. Виленкин, К. А. Бохан, И. А. Марон, И. В. Матвеев, М. Л. Смолянский, А. Т. Цветков. – М. : Просвещение, 1971. – 336 с.

6. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М. : Астрель, 2006. – 991 с.

7. *Гусак А. А.* Высшая математика : [в 2 т.]. Т. 1 / А. А. Гусак. – 3-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – 543 с.

8. *Гусак А. А.* Высшая математика : [в 2 т.]. Т. 2 / А. А. Гусак. – 3-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – 445 с.

9. *Рябушко А. П.* Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : [в 3 ч.]. Ч. 2 / А. П. Рябушко и др. – Минск : Вышэйшая школа, 1991. – 351 с.

10. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике : [в 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – 9-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2008. – 288 с.

11. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике : [в 2 ч.]. Ч. 2 / Д. Т. Письменный. – 6-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2008. – 256 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

*Учебное издание*

# *РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ*

## *для студентов инженерно-технических специальностей вузов*

## ЧАСТЬ 1

Учебно-методическое пособие

Составители:
Кузьмина Наталья Александровна,
Матвеева Анастасия Михайловна

Ответственный редактор Столяров А. В.

Компьютерная вёрстка Матвеевой А. М.

Подписано в печать 26.01.2010. Формат $60 \times 84/16$.
Бумага писчая. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 5,6. Тираж 50 экз. Заказ №

---

ГОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

---

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
ГОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38