тема 1. МАТРИЦЫ

1) Основные определения теории матриц

Определение. *Матрицей размерностью* $m \times n$ называется прямоугольная таблица $m \cdot n$ чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Эта таблица обычно заключается в круглые скобки.

Обозначение матриц:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ или } A = (a_{ij}), \text{ где } i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}.$$

ПРИМЕР. $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, $B_{2\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C_{1\times 1} = (7)$.

Определение. Числа, входящие в матрицу, называются *элементами матрицы*.

Элементы матрицы нумеруются двумя индексами: 1-й индекс элемента – это номер строки, 2-й индекс – номер столбца, в которых стоит элемент. Например, элемент a_{2n} находится во 2-й строке, в n-м столбце.

Определение. Если число строк матрицы равно числу столбцов ($m = n$), то матрица называется *квадратной* n-го порядка.

ПРИМЕР. $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица n-го порядка,

$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица 2-го порядка.

Определение. Элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратной матрицы $A_{n\times n}$ называются *диагональными*, а их совокупность – *главной диагональю* матрицы.

Элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ образуют *побочную* (*вспомогательную*) *диагональ*.

ПРИМЕР. $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, (2, –2) – главная диагональ, (0, 7) – вспомогательная диагональ.

Определение. Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю.

Определение. Квадратная матрица называется *единичной*, если все элементы главной диагонали равны единице, а остальные элементы равны нулю.

ПРИМЕР. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица 2-го порядка, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица 3-го порядка.

Определение. *Транспонированной* матрицей матрицы A называется матрица A^t, которая получается из матрицы A заменой строк матрицы A столбцами с теми же номерами.

ПРИМЕР. $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Определение. Матрица называется *ступенчатой*, если

1) все её строки – ненулевые,

2) первый ненулевой элемент каждой строки, начиная со второй, находится правее первого ненулевого элемента предыдущей строки.

ПРИМЕР. $A=\begin{pmatrix}1 & 9 & 7\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 4 & -2 & 3 & 8\\ 0 & 4 & 7 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 5 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

2) Действия над матрицами

Определение. Элементы матриц A и B, стоящие на одинаковых местах, называются *соответствующими.*

Определение. Матрицы одинаковой размерности называются *равными*, если равны соответствующие элементы этих матриц.

Действия над матрицами:

1. *Суммой матриц* одинаковой размерности называется матрица той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих элементов исходных матриц:

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\text{, где } c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

ПРИМЕР. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}_{2\times2}+\begin{pmatrix}5 & -6\\ 7 & 8\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}1+5 & 2-6\\ -3+7 & 4+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 4 & 12\end{pmatrix}_{2\times2}$.

2. *Произведением матрицы A на число λ* называется матрица λA, элементы которой равны произведению элементов матрицы A на заданное число λ:

$$\lambda A=(\lambda\cdot a_{ij}).$$

ПРИМЕР. $2\begin{pmatrix}-1\\ 6\end{pmatrix}_{2\times1}=\begin{pmatrix}-2\\ 12\end{pmatrix}_{2\times1}$.

3. *Произведением матриц* $A_{m\times p}=(a_{ik})$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$ и $B_{p\times n}=(b_{kj})$, $k=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,n}$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$, элементы c_{ij} которой равны произведению *i*-й строки матрицы A на *j*-й столбец матрицы B.

ПРИМЕР.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}_{4\times3}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}_{3\times2}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\\ c_{31} & c_{32}\\ c_{41} & c_{42}\end{pmatrix}_{4\times2}=\begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot3+3\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot(-2)+3\cdot1\\ 2\cdot2+(-1)\cdot3+0\cdot0 & 2\cdot3+(-1)\cdot(-2)+0\cdot1\\ 3\cdot2+2\cdot3+1\cdot0 & 3\cdot3+2\cdot(-2)+1\cdot1\\ 2\cdot2+0\cdot3+4\cdot0 & 2\cdot3+0\cdot(-2)+4\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 2\\ 1 & 8\\ 12 & 6\\ 4 & 10\end{pmatrix}_{4\times2}.$$

Замечания.

1) Для того, чтобы можно было выполнить умножение, число столбцов первой матрицы должно быть равным числу строк второй матрицы.

2) Матрицы в произведении нельзя переставлять местами, так как при этом может измениться результат или умножение потеряет смысл, то есть в общем случае $A\cdot B\neq B\cdot A$.

ПРИМЕР.

Найти значение выражения $A\cdot B-4E+D$, где $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 4\\ 6 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-3 & -6\\ 7 & 2\end{pmatrix}$,

E – единичная матрица соответствующей размерности.

Найдем $A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 4\\ 6 & 0\end{pmatrix}_{3\times2}=C_{2\times2}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}_{2\times2}$,

где $c_{11}=2\cdot2+(-1)\cdot(-1)+(-4)\cdot6=4+1-24=-19;$

$c_{12}=2\cdot(-2)+(-1)\cdot4+(-4)\cdot0=-4-4+0=-8;$

$c_{21} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 5 \cdot 6 = 6 + 0 + 30 = 36;$
$c_{22} = 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 + 5 \cdot 0 = -6 + 0 + 0 = -6.$

Следовательно, $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -19 & -8 \\ 36 & -6 \end{pmatrix}.$

Найдём $-4E$.

Согласно определению суммы матриц, для того чтобы сумма $A \cdot B - 4E + D$ имела смысл, размерности матриц $A \cdot B$, D и E должны совпадать, следовательно, $\dim E = 2 \times 2$, то есть $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Тогда $-4E = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot 1 & -4 \cdot 0 \\ -4 \cdot 0 & -4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$

Итак, получим $A \cdot B - 4E + D = \begin{pmatrix} -19 & -8 \\ 36 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & -14 \\ 43 & -8 \end{pmatrix}.$

3) Элементарные преобразования строк матрицы

Над строками матриц можно осуществлять четыре типа элементарных преобразований:

α – перестановка местами двух строк;

β – умножение строки на число, отличное от нуля;

γ – прибавление к одной строке другой, умноженной на число, отличное от нуля;

δ – отбрасывание нулевой строки.

При помощи этих преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатой матрице.

Определение. *Рангом* матрицы называется число строк соответствующей ей ступенчатой матрицы:

$$A_{m\times n} \text{ – ступенчатая матрица} \Rightarrow rg\, A = m.$$

ПРИМЕРЫ.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ – ступенчатая, то есть $rg\, A = 2$.

2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -9 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ – ступенчатая, то есть $rg\, B = 3$.

3) $C = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\delta} \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}$ – ступенчатая, то есть $rg\, C = 1$.

4) $D = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ – ступенчатая, то есть $rg\, D = 1$

тема 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1) Вычисление определителей

Определение. Каждой квадратной матрице A соответствует некоторое число $|A|$, или $\det A$, называемое ее *определителем* (det, Δ).

Правила нахождения определителей:

№ 1. Определитель 2-го порядка равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

ПРИМЕР. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot(-2) = 4 + 6 = 10,$

№ 2. Определитель 3-го порядка равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, плюс произведение элементов, стоящих в вершинах двух треугольников, одна из сторон которых параллельна главной диагонали, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали, минус произведение элементов, стоящих в вершинах двух треугольников, одна из сторон которых параллельна побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + dhc - gec - dbk - hfa .$$

ПРИМЕР. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 6\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 4 - 5\cdot 3\cdot 3 - 6\cdot 0\cdot 1 = 6 + 0 + 120 - 8 - 45 - 0 = 73 .$

№ 3.

Определение. *Минором* M_{ij} определителя называется определитель, который получается из исходного определителя вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца.

Определение. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется число, равное произведению $(-1)^{i+j}$ на соответствующий минор M_{ij} :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} .$$

Общее правило: определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) определителя на их алгебраические дополнения.

Замечания.

1) Удобно вести разложение определителя по той строке (столбцу), в которой больше нулей.

2) Определитель, имеющий нулевую строку (столбец), равен нулю.

3) Определитель, имеющий две одинаковые строки (столбцы), равен нулю.

ПРИМЕР.

Вычислить определитель:

1) по правилу треугольников;

2) разложив по общему правилу, например, по 1 строке.

1) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4\cdot 2\cdot 9 + 5\cdot 0\cdot 7 + 1\cdot 8\cdot 6 - 6\cdot 2\cdot 7 - 1\cdot 5\cdot 9 - 0\cdot 8\cdot 4 = 72 + 48 - 84 - 45 = -9 .$

2) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4\cdot A_{11} + 5\cdot A_{12} + 6\cdot A_{13} = 4(-1)^{1+1} M_{11} + 5(-1)^{1+2} M_{12} + 6(-1)^{1+3} M_{13} =$

$= 4\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4\cdot 18 - 5\cdot 9 + 6\cdot(8 - 14) = 72 - 45 - 36 = -9.$

тема 3. НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ПРИ ПОМОЩИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Определение. Квадратная матрица называется *обратной* по отношению к матрице *A*, если их произведение равно единичной матрице.

Обратную матрицу обозначают A^{-1}: $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E.$

Определение. Матрица *A* называется *невырожденной*, если она имеет обратную матрицу A^{-1}.

Теорема. *Всякая невырожденная квадратная матрица A имеет единственную обратную матрицу*

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}(A_{ij})^t,$$

где Δ *– определитель матрицы A,*

(A_{ij}) *– матрица из алгебраических дополнений элементов* a_{ij} *определителя матрицы A,*

t обозначает операцию транспонирования.

ПРИМЕР. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдём определитель матрицы A: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 6 - 1 - 4 + 3 = 5$.

Составим матрицу (A_{ij}) из алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} определителя матрицы A:

$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$, где

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$, $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2-3) = 1$, $\quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$,

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+1) = -5$, $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$, $\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-2) = 3$,

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$, $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-1) = -2$, $\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$.

Следовательно, $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогда её транспонированная матрица есть $(A_{ij})^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица A^{-1} примет вид: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}(A_{ij})^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

тема 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

1) Основные понятия

Определение. *Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)* называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (*)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные системы, которые требуется найти, решая систему;

a_{ij}, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$ – коэффициенты при неизвестных системы;

b_i, $i=\overline{1,m}$ – свободные члены системы.

Здесь система имеет m уравнений и n неизвестных.

Определение. *Решением системы* называется упорядоченная последовательность чисел, удовлетворяющих всем уравнениям системы.

Определение. *Матрицей системы* (*) называется матрица, составленная из коэффициентов a_{ij} при неизвестных системы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение. *Расширенной матрицей системы* (*) называется матрица, составленная из коэффициентов a_{ij} при неизвестных системы и свободных членов b_i

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Матричная запись СЛАУ (*): $A \cdot x = B$, где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕРЫ. Записать расширенную матрицу СЛАУ, сделать матричную запись СЛАУ.

1) $\begin{cases} x_1+4x_2=5, \\ -2x_1+x_2=1 \end{cases}$ $B=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{cases} -x+y-3=0, \\ 6y+x=10, \end{cases}$ запишем её в виде $\begin{cases} -x+y=3, \\ x+6y=10, \end{cases}$ тогда $B=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 10 \end{array}\right)$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных**) –**

1) расширенную матрицу системы привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований;

2) записать систему уравнений, соответствующую ступенчатой матрице;

3) решить полученную систему, поднимаясь «снизу вверх».

ПРИМЕР. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2-x_3=1, \\ x_1+3x_2+2x_3=-2. \end{cases}$

1) $B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right)$ – расширенная матрица системы. Приведем её к ступенчатому виду:

$$B=\left(A \mid b_i\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right).$$

2) Запишем систему уравнений, соответствующую ступенчатой матрице: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \quad x_2 + 3x_3 = 1, \\ \quad\quad 5x_3 = 5. \end{cases}$

3) Решим полученную систему: $\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 - x_2 = 1 - 1 + 2 = 2, \\ x_2 = 1 - 3x_3 = 1 - 3 = -2, \\ x_3 = 1. \end{cases}$

Ответ: (2; –2; 1).

Правило Крамера –

Пусть система имеет n уравнений и n неизвестных. Тогда при $\Delta \neq 0$ она имеет единственное решение $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, $k = \overline{1, n}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ .. & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$ – определитель матрицы системы,

Δ_k – определитель, полученный из основного определителя Δ заменой k-го столбца на столбец свободных членов системы b_k.

ПРИМЕР.

Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$

1) Найдём определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 6 - 1 - 4 + 3 = 5$.

2) Найдём определители $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 3 + 2 - 2 + 3 = 10$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 4 - 1 - 4 - 2 = -10$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 6 - 1 + 4 - 3 = 5$.

3) Решение системы: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{10}{5} = 2,\;\; x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-10}{5} = -2,\;\; x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{5}{5} = 5$.

Ответ: (2; –2; 1).

Матричный метод –

Пусть система $A \cdot x = B$ имеет n уравнений и n неизвестных. Тогда при $\Delta \neq 0$ она имеет единственное решение $x = A^{-1}b$, где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ .. & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$.

ПРИМЕР. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$

1) Запишем систему в матричной форме $Ax=b$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2) Найдём обратную матрицу A^{-1} матрицы A системы через алгебраические дополнения:

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}(A_{ij})^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ (см. пример темы 3).

3) Решение системы: $x = A^{-1}b = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

то есть $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1$.

Ответ: (2; –2; 1).