МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«ЧУВАШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И. Я. ЯКОВЛЕВА»

А. М. Матвеева, Т. Н. Глухова, Д. А. Абруков

Основы математической обработки информации

Учебное пособие

Чебоксары
2014

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73
М 333

Матвеева, А. М. Основы математической обработки информации : учебное пособие / А. М. Матвеева, Т. Н. Глухова, Д. А. Абруков. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. – 141 с.

Печатается по решению ученого совета ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
(протокол № 11 от 25. 04. 2014 г.).

Учебное пособие по дисциплине «Основы математической обработки информации» составлено в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования для студентов высших педагогических учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профилям подготовки «Технология», «Изобразительное искусство», «Музыка», «Физическая культура», «Дошкольное образование» (ФГОС-03, утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 22 декабря 2009 г. № 788) и по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профилям подготовки «История и право», «Русский язык и литература», «Мировая художественная культура и русский язык», «Родной язык и литература, русский язык», «Иностранный язык (первый), иностранный язык (второй)» (ФГОС-03, утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 января 2011 г. № 46).

Книга содержит теоретический и практический материал по основам математической обработки информации, тексты расчетно-графической работы, вопросы зачета, примерные задачи к зачету.

Р е ц е н з е н т ы:

П. А. Фисунов – кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой математики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «Чувашская государственная сельскохозяйственная академия»;

В. И. Копылов – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»;

Т. Т. Пономарева – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева».

© Матвеева А. М., Глухова Т. Н., Абруков Д. А., 2014
© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2014

Предисловие

Учебное пособие составлено в соответствии с действующей рабочей программой курса «Основы математической обработки информации» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профили подготовки «Технология», «Изобразительное искусство», «Музыка», «Физическая культура», «Дошкольное образование» и по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили подготовки «История и право», «Русский язык и литература», «Мировая художественная культура и русский язык», «Родной язык и литература, русский язык», «Иностранный язык (первый), иностранный язык (второй)» высших педагогических учебных заведений.

Целью данного пособия является расширение математических представлений, выходящих за пределы школьного курса, ознакомление студентов с начальными сведениями и типовыми задачами по некоторым основополагающим разделам высшей математики.

Книга содержит начальные сведения по следующим разделам высшей математики, материал которых основан на соответствующей литературе: теория информации [2], [8], [9], [11]; математическое моделирование [8], [11], [12]; теория множеств [1], [2], [3], [6], [15]; теория чисел [1], [3], [15]; математическая логика [3], [7], [10], [15]; комбинаторика [2], [3], [4], [5], [8], [13], [15]; теория вероятностей и математическая статистика [2], [3], [4], [5], [8], [10], [13]–[15].

В конце каждого параграфа даны контрольные вопросы для самопроверки, приведено достаточное количество задач, позволяющих применить и закрепить полученные знания на практике. Также даны задачи для внеаудиторной работы и дополнительные задачи повышенной трудности. Размещены тексты расчётно-графической работы, вопросы и примерные задачи зачёта по дисциплине «Основы математической обработки информации».

Основные понятия и тексты теорем выделены курсивом. Изложение теоретического материала сопровождается примерами основных понятий и решений задач.

Авторы будут благодарны всем читателям – преподавателям и студентам – за отзывы и замечания об этой книге.

§ 1. Информация

1. Понятие информации.
2. Классификация информации.
3. Свойства информации.
4. Обработка информации.

1. Понятие информации

Слово «*информация*» происходит от латинского слова informatio, что в переводе означает сведение, разъяснение, ознакомление.

Понятие «информация» используется в различных науках, при этом в каждой науке данное понятие описывается своим специфическим набором признаков. Например, в биологии рассматривают генетическую информацию, которая передается по наследству и хранится во всех клетках живых организмов (в виде ДНК).

В настоящее время не существует единого определения термина информация.

Можно выделить следующие подходы к определению информации:

– *традиционный* (обыденный) используется в информатике. Информация – это сведения, знания, сообщения о положении дел, которые человек воспринимает из окружающего мира с помощью органов чувств (зрения, слуха, вкуса, обоняния, осязания).

– *вероятностный* используется в теории об информации. Информация – это сведения об объектах и явлениях окружающей среды, их параметрах, свойствах и состоянии, которые уменьшают имеющуюся о них степень неопределённости и неполноты знаний.

Каждого человека в мире окружает море информации различных видов. Информация содержится везде. Дерево содержит собственную генетическую информацию, и только благодаря этой информации от семечки берёзы вырастает только берёза. Для деревьев источником информации является воздух, именно по уровню состояния воздуха дерево может определить время распускания почек. Перелетные птицы знают свой маршрут перелёта, и каждая стая идёт только своим заданным в генах маршрутом.

Информация и её свойства являются объектом исследования целого ряда научных дисциплин, таких как теория информации (математическая теория систем передачи информации), кибернетика (наука о связи и управлении в машинах и животных, а также в обществе и человеческих существах), семиотика (наука о знаках и знаковых системах), теория массовой коммуникации (исследование средств массовой информации и их влияния на общество), информатика (изучение процессов сбора, преобразования, хранения, защиты, поиска и передачи всех видов информации и средств их автоматизированной обработки), соционика (теория информационного метаболизма индивидуальной и социальной психики), информодинамика (наука об открытых информационных системах), информациология (наука о получении, сохранении и передаче информации для различных множеств объектов) и т. д.

2. Классификация информации

По способам восприятия:

– визуальная;
– аудиальная;
– тактильная, передаваемая ощущениями;
– обонятельная;
– вкусовая.

По формам представления, способам кодирования и хранения информации:

– графическая или изобразительная: первый вид, для которого был реализован способ хранения информации об окружающем мире в виде наскальных рисунков, а позднее в виде картин, фотографий, схем, чертежей на бумаге, холсте, мраморе и др. материалах, изображающих картины реального мира;

– звуковая или музыкальная: мир вокруг нас полон звуков и задача их хранения и тиражирования была решена с изобретением звукозаписывающих устройств в 1877 г.;

– текстовая: способ кодирования речи человека специальными символами – буквами, причём разные народы имеют разные языки и используют различные наборы букв для отображения речи; особенно большое значение этот способ приобрел после изобретения бумаги и книгопечатания;

– числовая: способ кодирования количественной меры объектов и их свойств в окружающем мире специальными символами – цифрами, причём системы кодирования (счисления) могут быть разными; особенно большое значение приобрела с развитием торговли, экономики и денежного обмена;

– видеоинформация: способ сохранения «живых» картин окружающего мира, появившийся с изобретением кино.

По общественному значению:

– массовая;
– обыденная;
– общественно-политическая;
– эстетическая.

Специальная:

– научная;
– техническая;
– управленческая;
– производственная.

Личная: наши знания, умения, интуиция.

Особым видом информации в настоящее время можно считать *информацию*, представленную в *глобальной сети Интернет*. Здесь используются особые приёмы хранения, обработки, поиска и передачи распределённой информации больших объёмов и особые способы работы с различными видами информации. Постоянно совершенствуется программное обеспечение, обеспечивающее коллективную работу с информацией всех видов.

3. Свойства информации

Как и всякий объект, информация обладает свойствами. Характерной отличительной особенностью информации от других объектов природы и общества, является дуализм: на свойства информации влияют как свойства исходных данных, составляющих её содержательную часть, так и свойства методов, фиксирующих эту информацию.

С точки зрения информатики наиболее важными представляются следующие общие качественные свойства.

1. *Объективность*: информация объективна, если она не зависит от методов её фиксации, чьего-либо мнения, суждения.

Пример. Сообщение «На улице тепло» несёт субъективную информацию, а сообщение «На улице 22°C» – объективную, но с точностью, зависящей от погрешности средства измерения.

Объективную информацию можно получить с помощью исправных датчиков, измерительных приборов.

Отражаясь в сознании человека, информация может искажаться (в большей или меньшей степени) в зависимости от мнения, суждения, опыта, знаний конкретного субъекта, и, таким образом, перестать быть объективной.

2. *Достоверность*: информация достоверна, если она отражает истинное положение дел.

Объективная информация всегда достоверна, но достоверная информация может быть как объективной, так и субъективной. Достоверная информация помогает принять нам правильное решение. Недостоверной информация может быть по следующим причинам:

– преднамеренное искажение (дезинформация) или непреднамеренное искажение субъективного свойства;

– искажение в результате воздействия помех («испорченный телефон») и недостаточно точных средств её фиксации.

3. *Полнота*: информацию можно назвать полной, если её достаточно для понимания и принятия решений. Неполная информация может привести к ошибочному выводу или решению.

4. *Полезность* (*ценность*) информации: обеспечивает решение поставленной задачи, нужна для того, чтобы принимать правильные решения.

5. *Актуальность* информации – важность для настоящего времени. Только вовремя полученная информация может быть полезна.

6. *Понятность* (*ясность*): информация должна быть выражена на языке, доступном получателю.

Информация обладает ещё следующими свойствами.

Атрибутивные свойства:

– дискретность: информация состоит из отдельных частей, знаков;

– непрерывность: возможность накапливать информацию.

Динамические свойства – связаны с изменением информации во времени:

– копирование – размножение информации;

– передача от источника к потребителю;

– перевод с одного языка на другой;

– перенос на другой носитель;

– старение: связанно с потерей ценности информации с течением времени. Старение может быть физическим – износ носителя и моральным – потеря актуальности информации.

Научно-техническая информация стареет быстрее, эстетическая (произведения искусства) – медленнее.
Практические свойства – информационный объём и плотность.

4. Обработка информации

Определение. Под *обработкой информации* понимают процесс перехода от исходной информации к новой информации, либо изменение формы представления информации.

Определение. Нечто или некто, выполняющий обработку информации, называется *исполнителем*.

Форму представления информации можно изменить путём систематизации, сортировки, кодирования исходной информации, т.д.

Новую информацию можно получить путём логических рассуждений (*эвристический* способ обработки информации) или действуя по определённым правилам (*формальный* способ обработки информации).

Пример. При розыске преступника детектив действует эвристически. При умножении чисел человек руководствуется правилами умножения, то есть имеет место формальная обработка информации.

При формальной обработке информации работу можно поручить техническому устройству, которое способно понимать и исполнять предписанную ему инструкцию. С появлением компьютеров вначале появилось средство для обработки числовой информации. Однако в дальнейшем, особенно после широкого распространения персональных компьютеров, компьютеры стали использоваться для хранения, обработки, передачи и поиска текстовой, числовой, изобразительной, звуковой и видеоинформации.

Контрольные вопросы к § 1

1. Сформулируйте сущность традиционного и вероятностного подходов к понятию информации.
2. Приведите примеры дисциплин, объектом исследования которых является информация.
3. Как можно классифицировать информацию по способам её восприятия?
4. Какие формы представления информации существуют?
5. Перечислите общие качественные свойства информации.

6. Сформулируйте атрибутивные свойства информации.
7. В чём сущность динамических свойств информации?
8. Что понимают под обработкой информации?
9. Какие два основных способа обработки информации существуют?

§ 2. Математический язык

1. Понятие языка.
2. Структура математического языка.

1. Понятие языка

Информация хранится, передаётся и обрабатывается в символьной (знаковой) форме.

Представление информации осуществляется с помощью языков.

Определение. *Язык* – это определённая знаковая система представления информации, которая строится на основе определённого алфавита и имеет правила для выполнения операций над знаками.

Существуют:

– *естественные* языки: разговорные языки, язык мимики и жестов, язык специальных знаков (например, дорожных);

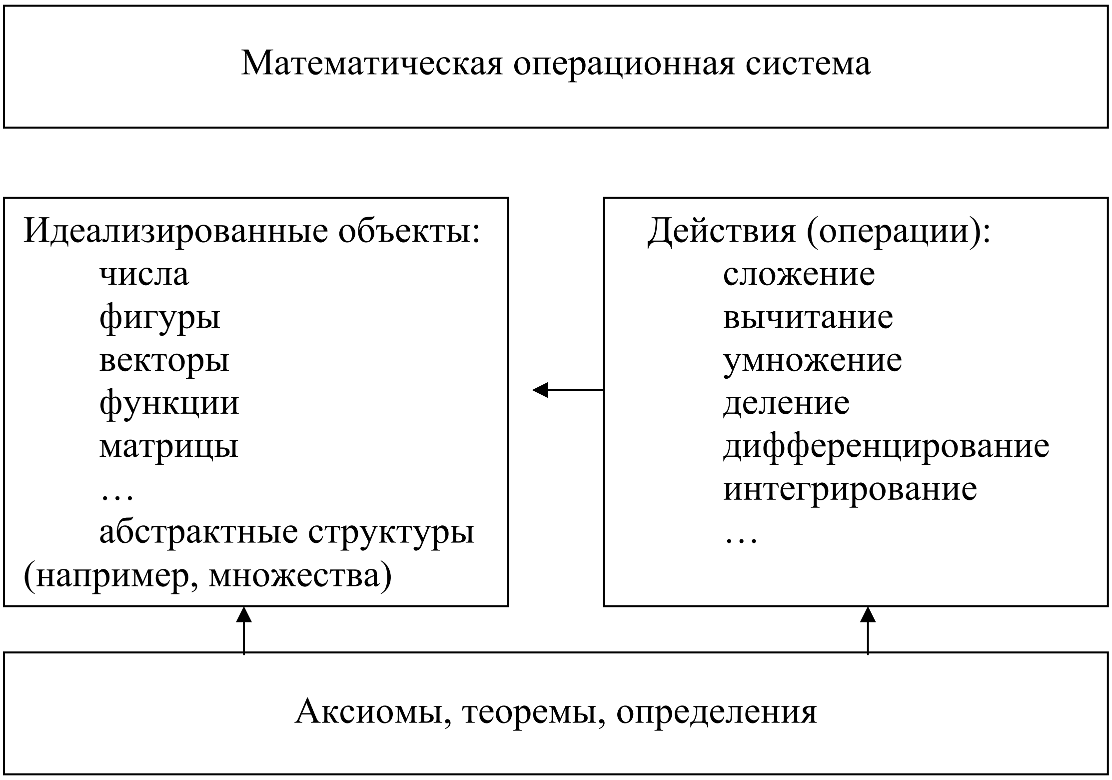
– *формальные* языки: специальные языки для различных областей человеческой деятельности, которые характеризуются жёстко зафиксированным алфавитом, более строгими правилами грамматики и синтаксиса – язык музыки (ноты), язык математики (цифры, математические знаки), системы счисления, языки программирования и т.д.

В основе любого языка лежит *алфавит* – это набор символов/знаков.

2. Структура математического языка

Определение. *Математический язык* – это формальный язык, который состоит из математических высказываний, то есть математических символов, объединённых формулой.

Математический язык более краток и ясен, чем обычный, так как оперирует точными понятиями.



Язык в широком смысле слова – это словарь, грамматика и соответственно повести, романы и пр., написанные на этом языке.

В математическом языке:

словарь, грамматика – это математическая операционная система,

повести, романы и пр. – это математические модели.

Математика, как и другие науки, изучает действительный, материальный мир, объекты этого мира и отношения между ними. Однако, в отличие от наук, исследующих различные формы движения материи (механика, физика, химия, биология и др.) или виды передачи информации (информатика, кибернетика), математика изучает формы и отношения, взятые в отвлечении от их содержания. Последнее выделяет математику из ряда естественных наук.

Современная математика насчитывает большое количество направлений (теорий): математическая статистика и теория вероятностей, математическое моделирование, численные методы, теория групп, теория чисел, теория множеств, аналитическая, проективная и дифференциальная геометрия, топология, математический анализ и т. д.

Несмотря на многообразие математических теорий, все они строятся по одному общему принципу, носящему название *аксиоматического метода*.

В основе любой *математической теории*, построенной в согласии с аксиоматическим методом, лежат аксиомы.

Определение. *Аксиома* – это предложение, принимаемое без доказательства.

Все остальные предложения теории выводятся из аксиом (то есть доказываются) на основании логических правил вывода и правил определения предложений, допускаемых в данной теории, таким образом, получают теоремы.

Определение. *Теорема* – это предложение, требующее доказательства.

При этом все умозаключения производятся с помощью *логических рассуждений* (*дедуктивных и индуктивных*). Теория становится рекурсивно структурированной, то есть представимой в виде дерева или множества матрёшек, вложенных одна в другую.

Основным методом математических исследований является доказательство.

Определение. *Доказательство* – это рассуждение, которое показывает, что истинность утверждения вытекает логически из истинности предыдущих теорем или аксиом.

Пример. В качестве примера аксиомы геометрии можно привести следующее утверждение: «*через любые две точки можно провести единственную прямую*».

Контрольные вопросы к § 2

1. Что такое язык, какие два основных вида языков существуют?
2. Что понимается под алфавитом языка?
3. Опишите структуру математического языка.
4. Что лежит в основе математической теории, построенной в согласии с аксиоматическим методом?
5. Что такое аксиома, теорема, доказательство?
6. Приведите пример аксиом геометрии.

§ 3. Математические модели

1. Математика и естествознание.
2. Понятие модели и моделирования.
3. Примеры математических моделей.

1. Математика и естествознание

Выделяют три направления в изучении объектов окружающего мира.

1. Экспериментальное направление

В ходе наблюдения, эксперимента мы получаем экспериментальные данные, которые необходимо обработать.

Математическая обработка экспериментальных данных включает:

– определение истинных значений измеряемых величин;

– определение вида функциональной зависимости исследуемых величин;

– определение количественных характеристик (параметров) функциональных зависимостей.

2. Теоретическое направление:

– выдвижение гипотезы и посторенние математической модели (в виде уравнений или неравенств);

– исследование математической модели (решение математической задачи);

– экспериментальная проверка (если возможна);

– модификация модели.

Таким образом, в основе теоретического подхода лежит математическая модель.

3. Вычислительное направление:

– выбор и построение математической модели;

– разработка численного алгоритма решения математической задачи;

– составление компьютерной программы;

– проведение вычислений с помощью компьютера;

– анализ результатов и их экспериментальная проверка (если возможна).

Основа вычислительного эксперимента:

модель + алгоритм + программа.

2. Понятие модели и моделирования

Определение. *Моделью* называется образ или отображение какого-либо процесса или явления, полученное с помощью специальных средств.

Классификация специальных средств:

1) математические,

2) технические,

3) компьютерные,

и т.д.

В зависимости от выбранных средств можно получить различные виды моделей.

Определение. *Математической моделью* называется образ или отображение какого-либо процесса или явления, полученное с помощью математических средств.

Некоторые модели могут существовать сами по себе (например, технические модели), между другими видами моделей существует определённая связь (например, компьютерную модель нельзя представить без математической).

Определение. *Моделированием* называется процесс создания модели.

Основная цель моделирования – исследовать объекты реального мира и предсказать результаты будущих наблюдений.

Математическое моделирование и связанный с ним компьютерный эксперимент незаменимы в тех случаях, когда *натурный эксперимент* невозможен или затруднён по тем или иным причинам. Например, нельзя поставить натурный эксперимент в истории, чтобы проверить, «что было бы, если бы...». Невозможно проверить правильность той или иной космологической теории. В принципе возможно, но вряд ли разумно, поставить эксперимент по распространению какой-либо болезни, например чумы, или осуществить ядерный взрыв, чтобы изучить его последствия. Однако всё это вполне можно сделать на компьютере, построив предварительно математические модели изучаемых явлений.

3. Примеры математических моделей

1) Задача о движении снаряда.

Снаряд брошен с начальной скоростью v_0 под углом α к поверхности Земли. Найти траекторию его движения и дальность полёта.

Из школьного курса физики известно, что движение снаряда описывается формулами

$$x = v_0 \cos \alpha t,\ y = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

Эти формулы и дают математическую модель поставленной задачи (из них получают уравнения траектории и дальности полёта снаряда).

2) Задача о радиоактивном распаде.

Определить массу радия по истечении некоторого времени t.

Если первоначальная масса радия равна m_0, то его искомая масса определяется по формуле

$$x = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{1590}}.$$

3) Модель «хищник – жертва».

Если число жертв (например, зайцев) равно x, число хищников (например, волков) равно y, то система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy} y),\ \frac{dy}{dt} = -y(\varepsilon_y - \gamma_{yx} x)$$

выражает изменение численности жертв и хищников.

Контрольные вопросы к § 3

1. Назовите направления в изучении объектов окружающего мира.
2. Что называется моделью?
3. Что понимается под математической моделью?
4. В чём состоит цель математического моделирования?
5. Приведите примеры математических моделей.

§ 4. Теоретико-множественные основы математической обработки информации

1. Понятие множества.
2. Операции над множествами, их свойства.
3. Численность множества.

1. Понятие множества

Людям постоянно приходится иметь дело с различными совокупностями предметов, что повлекло за собой возникновение понятия числа, а затем и понятия множества, которое является одним из основных простейших математических понятий.

Теория множеств – это раздел математики, в котром изучаются общие свойства множеств.

Основатель научной теории множеств – немецкий математик Георг Кантор.

Определение. *Множеством* называется совокупность объектов определённой природы.

Определение. Объекты, из которых состоит данное множество, называются его *элементами.*

Множества обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, …

Элементы множества обозначаются малыми буквами латинского алфавита: a, b, c, …

Запись $a \in B$ означает, что элемент a принадлежит множеству B, $x \notin C$ – элемент x не принадлежит множеству C.

Определение. *Конечными* называются множества, состоящие из конечного числа элементов.

Пример. Множество студентов в аудитории – конечное множество.

Определение. Множества, не являющиеся конечными, называются *бесконечными*.

Пример. Множество звёзд на небе – бесконечное множество.

Определение. Множество, не имеющее ни одного элемента, называется *пустым*, обозначается символом $\varnothing$.

Пустое множество считается конечным множеством.

<u>Способы задания множеств.</u>

1) *Перечисляются все элементы множества*, при этом элементы множества записываются в фигурных скобках. Этот способ применяется только для конечных множеств. Например, $A = \{1; 2; 3\}$.

2) *Указывается характеристическое свойство* множества – свойство, которым обладают все элементы данного множества. Этот способ задания применим и к конечным, и к бесконечным множествам.

Примеры. Рассмотрим множества A и B, заданные характеристическим свойством.

$A=\{x \mid x^2-2x=0\}$ – множество A состоит из тех элементов, которые являются корнями указанного квадратного уравнения, то есть $A=\{0;2\}$ – конечное множество.

$B=\{n^2 \mid n\in N\}$ –множество B состоит из тех элементов, которые являются квадратами натуральных чисел, то есть $B=\{1;\,4;\,9;\,16;\,25;\,...\,\}$ – бесконечное множество.

Определение. Множества A и B называются *равными* и обозначаются $A=B$, если они содержат одни и те же элементы.

Пример. Множества $A=\{1;\,2;\,3\}$ и $B=\{3;1;\,2\}$ равны, так как содержат одинаковые элементы, то есть $A=B$.

Определение. Говорят, что множество B является *подмножеством* множества A, если каждый элемент из множества B является элементом и множества A: $B\subset A$.

Примеры.

1) Пусть A – множество канцелярских товаров в аудитории, B – множество шариковых ручек в аудитории, тогда $B\subset A$.

2) Перечислим все подмножества множества $A=\{1;\,2;\,3\}$:
$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1;\,2\}$, $\{1;\,3\}$, $\{2;\,3\}$, $\{1;\,2;\,3\}$, $\varnothing$.

Замечания.

1. Если $A=B$, то $B\subset A$, $A\subset B$.
2. Пустое множество является подмножеством любого множества: $\varnothing\subset A$.
3. Знак $\subset$ можно ставить только между множествами: $B\subset A$, $\varnothing\subset A$.
4. Знак $\in$ можно ставить только между элементом множества и самим множеством: $a\in\{a;\,b;\,c\}$.

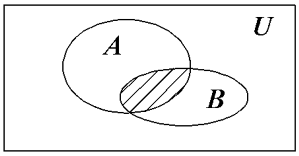
2. Операции над множествами, их свойства

Пусть все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого фиксированного множества, которое назовём *универсальным* и обозначим буквой U. Для геометрической иллюстрации операций над множествами воспользуемся *диаграммами Эйлера – Венна*, на которых универсальное множество изображают в виде прямоугольника, а остальные множества – в виде овалов, в частности кругов. Введём операции над множествами.

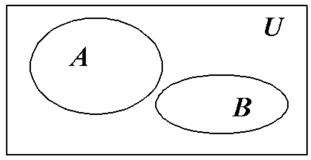
Определение. *Пересечением множеств A и B* называется множество, обозначаемое $A \cap B$, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно **и** множеству *A*, **и** множеству *B*:

$$A \cap B = \{x \in A \quad и \quad x \in B\}.$$

$A \cap B$



$A \cap B = \varnothing$



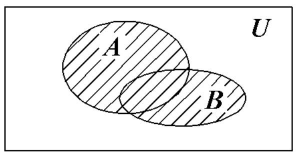
Примеры.

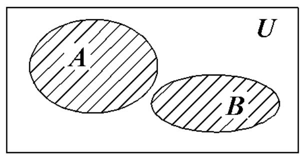
1) Для $A = \{1; 3; 5; 6\}$ и $B = \{2; 4; 6\}$ имеем $A \cap B = \{6\}$.

2) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Определение. *Объединением множеств A и B* называется множество, обозначаемое $A \cup B$, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств *A* **или** *B*:

$$A \cup B = \{x \in A \quad или \quad x \in B\}.$$





Примеры.

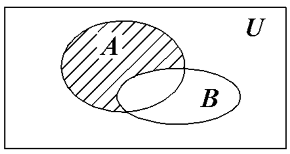
1) Для $A = \{1; 3; 5; 6\}$ и $B = \{2; 4; 6\}$ имеем $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

2) $A \cup \varnothing = A$.

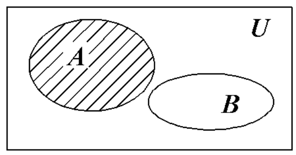
Определение. *Разностью двух множеств A и B* называется множество, обозначаемое $A \setminus B$, состоящее из элементов множества *A*, не принадлежащих множеству *B*:

$$A \setminus B = \{x \in A \quad и \quad x \notin B\}.$$

$A \setminus B$



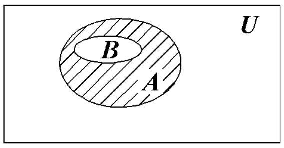
$A \setminus B = A$

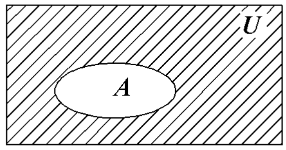


Пример. Для $A = \{1; 3; 5; 6\}$ и $B = \{2; 4; 6\}$ имеем $A \setminus B = \{1; 3; 5\}$, $B \setminus A = \{2; 4\}$.

Определение. Если множество B является подмножеством множества A, то разность $A \setminus B$ называют *дополнением множества B до множества A* и обозначают $C_A B$.

$C_A B$ $\qquad\qquad\qquad$ $C_U A$





Пример. Для $A = \{1; 3; 5; 6\}$ и $B = \{3; 6\}$ имеем $C_A B = \{1; 5\}$.

В случае числовых множеств запись $C_R A$ означает дополнение множества A до множества R действительных чисел (или всей числовой прямой).

Пример. Даны числовые множества $A = (-2; 4]$, $B = [0; 7)$. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C_R A$, $C_R B$.

Решение.

$A \cap B = (-2; 7)$, $\qquad$ $A \cup B = [0; 4]$,

$A \setminus B = (-2; 0)$, $\qquad$ $B \setminus A = (4; 7)$,

$C_R A = (-\infty; -2] \cup (4; +\infty)$, $\qquad$ $C_R B = (-\infty; 0) \cup [7; +\infty)$.

Определение. *Абсолютным дополнением* множества A называется множество A' всех таких элементов $x \in U$, которые не принадлежат множеству A: $A' = U \setminus A$. Иногда вместо A' пишут $\overline{A}$.

Пример. Пусть A – множество положительных чётных чисел, U – множество всех натуральных чисел, тогда $\overline{A}$ – множество положительных нечётных чисел.

Определение. *Декартовым произведением множеств* $A_1, A_2, ..., A_k$ называется множество, обозначаемое $A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$, состоящее из всех упорядоченных наборов (кортежей) вида $(a_1; a_2; ...; a_k)$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, ..., a_k \in A_k$.

Пример. Для множеств $A = \{1;2;3\}$, $B = \{a;b\}$ имеем

$$A \times B = \{(1;a), (1;b), (2;a), (2;b), (3;a), (3;b)\},$$

$$B \times A = \{(a;1), (b;1), (a;2), (b;2), (a;3), (b;3)\}.$$

Видим, что в общем случае $A \times B \neq B \times A$.

Замечания.

1. Если одно из множеств пусто, то и их декартово произведение считается пустым.

2. Множество координат точек координатной плоскости является декартовым произведением $R \times R$, где R – множество действительных чисел – координаты точек по оси Ox, Oy соответственно.

3. Численность множества

Определение. *Численностью* конечного множества A называется число $n(A)$ элементов множества A.

Пусть A, B – конечные множества, тогда справедливо:

1) если множества A и B не пересекаются, то

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B),$$

$$n(A \setminus B) = n(A);$$

2) если множества A и B пересекаются, то

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$

$$n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B);$$

3) если $B \subset A$, то $n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$.

Замечание. Для конечных пересекающихся множеств A, B, C имеем

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) -$$

$$- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Пример. Применим теорию множеств для решения задачи.

В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 – французский язык, 23 – оба языка. Сколько туристов не знают ни английского, ни французского языка?

Решение. Введём обозначения:

U – множество всех туристов;

A – множество туристов, знающих английский язык;

B – множество туристов, знающих французский язык.

Тогда $A \cup B$ – множество туристов, знающих хотя бы один язык (английский или французский), $A \cap B$ – множество туристов, знающих оба языка (и английский, и французский). Причём имеем $n(U) = 100$, $n(A) = 70$, $n(B) = 45$, $n(A \cap B) = 23$.

Таким образом, $U \setminus (A \cup B)$ – множество туристов, не знающих ни английского, ни французского языка.

Так как $(A \cup B) \subset U$, то $n(U \setminus (A \cup B)) = n(U) - n(A \cup B)$.

Множества A и B пересекаются, следовательно, имеем $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 45 - 23 = 92$.

Тогда получим $n(U \setminus (A \cup B)) = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 92 = 8$.

Таким образом, 8 туристов не знают ни английского, ни французского языка.

Контрольные вопросы к § 4

1. Дайте понятие множества.
2. Перечислите способы задания множеств.
3. Что называется подмножеством множества?
4. Укажите способ иллюстрации работы с множествами.
5. Дайте определения операций над множествами.
6. Что такое численность конечного множества?
7. Как определить численность объединения и разности двух конечных множеств?

Задачи

1. Указать верные записи:

а) $2 \subset \{-2; 2; 1\}$; б) $\{2\} \in \{-2; 2; 1\}$; в) $\{2\} \subset \{-2; 2; 1\}$;

г) $\varnothing \in \{-2; 2; 1\}$; д) $\varnothing \subset \{-2; 2; 1\}$; е) $2 \in \{-2; 2; 1\}$.

2. Среди перечисленных ниже множеств указать конечные и бесконечные множества:

а) множество чисел, кратных 13;

б) множество делителей числа 130;

в) множество деревьев в лесу;

г) множество точек отрезка;

д) множество рек Российской Федерации;

е) множество корней уравнения $2(x+5) = 2x+10$;

ж) множество решений неравенства $x+1<3$.

3. Указать, какие из следующих множеств являются пустыми:

а) множество параллелограммов с неравными противоположными сторонами;

б) множество натуральных чисел, меньших 2;

в) множество натуральных двузначных чисел, меньших 9;

г) множество двузначных чисел, больших 9;

д) множество квадратов, не имеющих центра симметрии;

е) множество городов на Луне.

4. Для каждого из слов СОСНА, ОСКОЛОК, НАСОС, КОЛОС составить множества его различных букв. Есть ли среди них равные множества?

5. Указать равные между собой множества:

а) A – множество всех квадратов;

б) B – множество всех прямоугольников;

в) C – множество всех четырёхугольников с прямыми углами;

г) D – множество всех четырёхугольников с равными сторонами;

д) F – множество всех ромбов с прямыми углами.

6. Записать все подмножества множества $A = \{-2; 8; 1\}$.

7. Перечислить элементы множеств:

а) $A = \{x | \, x^5 - 8x^3 + 16x = 0\}$; б) $B = \{x | (4x^2 - 1) \cdot \sqrt{x+6} = 0\}$.

8. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C_R A$, $C_R B$, если:

а) $A = [-2; 6]$, $B = (1; 10)$; б) $A = (-3; 5]$, $B = [6; 7)$;

в) $A = (0; 1]$, $B = (-\infty; 2)$; г) $A = (-\infty; 8)$, $B = (0; +\infty)$;

д) $A = [2; 7]$, $B = [4{,}5; 7]$; е) $A = [3; +\infty)$, $B = [3{,}2; +\infty)$;

ж) $A = [-10{,}5; 4]$, $B = [0; 8]$; з) $A = (-\infty; 7]$, $B = [7; +\infty)$;

и) $A = (-\infty; -5{,}5]$, $B = (-6; +\infty)$.

9. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если:

а) $A = \{-2; 0; 3; 8; 1\}$, $B = \{0; 4; 5; 8; 1\}$;

б) $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{4; 1\}$.

10. Числовое множество E задано в виде $E = (A \cup B) \setminus (C \cap D)$, где $A = [-10; 2]$, $B = (0; 5]$, $C = [-3; +\infty)$, $D = (-20; -1)$. Найти $C_R E$.

11. Найти $A \cap B$, если A – это множество корней уравнения $x^2 + 5x + 6 = 0$, B – это множество корней уравнения $x^2 - 2x - 8 = 0$.

12. Из множеств $\{a; b; c\}$ и $\{1; 2\}$ составить кортежи.

13. Сравнить кортежи:

а) $(1^2; 2^2; 3^2)$ и $(\sqrt{1}; \sqrt{16}; \sqrt{81})$;

б) $(1; 2; 3)$ и $(3; 1; 2)$;

в) $(1; 2; 3)$ и $(1; 2; 3; 4)$.

14. Пусть $A = \{1; 2\}$. Выписать все элементы декартова произведения $A \times A$.

15. Проверить, верно ли, что $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$. В качестве множеств A, B и C взять множества $A = \{1\}$, $B = \{4; 5\}$, $C = \{8; 2\}$.

16. Найти $(A \times B) \cap (C \times D)$ и $(A \times B) \setminus (C \times B)$, если $A = \{1; 6; 9\}$, $B = \{5; 7\}$, $C = \{6\}$, $D = \{1; 5; 6; 7; 8\}$.

17. В группе 50 студентов. Из них 33 студента любят болтать на занятиях, 23 – любят решать задачи, 21 – любят на занятиях спать. Среди тех, кто болтает на занятиях, постоянно засыпают 17 человек, а среди тех, кто решает задачи, засыпает только 13. Болтать и решать задачи умеют 18 человек, а 11 человек успевают на одном занятии сделать три дела. Сколько студентов вообще ничего не любят?

18. 10 мальчиков поехали на пикник. При этом 3 из них обгорели, 5 были сильно покусаны комарами, а 4 остались всем довольны. Сколько покусанных комарами мальчиков также и обгорели? Сколько обгоревших мальчиков не было покусано комарами?

19. Из 40 предложений 30 содержат предлог «в», 27 – предлог «на», в 5 предложениях нет ни того, ни другого. Сколько предложений содержат оба предлога?

20. A, B, C – подмножества универсального множества U. Известно, что $A \cap B \cap C = \varnothing$. Построить диаграммы Эйлера-Венна для данных множеств и отметить штриховкой области, изображающие следующие множества:

а) $A' \cup (B \cap C)$; б) $A \cup (B' \cup C)$;
в) $A \cap (B' \cup C)$; г) $(A \cup C') \setminus B$;
д) $(A \cap B') \cup C$; е) $(A \setminus B)' \cap C$;
ж) $A \setminus (B \cap C')$; з) $(A \setminus B) \cup C'$;
и) $A \cup (B \cap C)'$; к) $(A' \cup B') \cap C$.

21. Построить диаграммы Эйлера-Венна для следующих множеств:

а) $(A \cup B) \cap C$; б) $A \cup B \cap C$;
в) $(A \cap B) \cup C$; г) $A \cap B \cup C$.

Домашнее задание

22. Пусть A – множество всех целых делителей числа 15. Перечислить элементы множества A. Верно ли, что $6 \notin A$?

23. Даны множества A={дочери}, B={матери}, C={бабушки}, D={женщины}. Записать из них последовательность подмножеств.

24. Пусть A – множество всех правильных многоугольников, B – множество всех треугольников, C – множество всех четырёхугольников. Описать множества $A \cap B, A \cap C, B \cap C$.

25. Найти $C \cap D$, если
$C = \{x \mid (x^2 - 2x + 1)(x - 3) = 0\}$, $D = \{x \mid (x^2 - 9)(2x^2 + x - 3) = 0\}$.

26. Найти $A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A,\ C_R A,\ C_R B$, если $A = (-\infty; 8]$, $B = (0; 12]$.

27. Найти $A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$, если $A = \{-3; -1; 0; 5; 10\}$, $B = \{-9; -1; 1; 5; 9\}$.

28. Равны ли следующие кортежи:

а) $(a, \{a,b,c\}, b, c)$ и $(a, \{a,b,c\}, \{b,c\})$;

б) $(a, \{a,b,c\}, b, c)$ и $(a, \{a,b,c\}, b, c)$;

в) $(a, \{a,b,c\}, b, c)$ и $(a, \{a,b,c\}, c, b)$;

г) $(a, \{a,b,c\}, b, c)$ и $(a, \{a,b,c\}, a, b, c)$?

29. Проверить, верно ли, что $A \times B = B \times A$. В качестве множеств A и B взять множества $A = \{3; 1\}$, $B = \{0; 6\}$.

30. В группе 30 студентов. Из них 20 студентов сдали экзамен по математике, 15 – экзамен по истории, 12 – по математике и истории. Сколько человек не сдали экзамены? Сколько человек сдали только один экзамен?

31. Из 100 студентов английский язык знают 28 студентов, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного языка?

Дополнительные задачи

32. Дано множество $X = \{213; 45; 324; 732; 136\}$. Записать подмножество этого множества, элементами которого являются числа:

а) делящиеся на 9; б) делящиеся на 3;
в) делящиеся на 4; г) сумма цифр которых равна 9;
д) оканчивающиеся на 0.

В каком отношении между собой находится каждая пара выписанных подмножеств?

33. Для каких из следующих пар множеств имеет место одно из соотношений $A \subset B, B \subset A, A = B$:

а) $A = \{a;b;c;d\}$, $B = \{a;c;d\}$;

б) $A = \varnothing, B = \varnothing$;

в) $A = \{a;b;c\}$, $B = \{b;c;a\}$?

34. Задать перечислением элементов множества $A \cap B$, $A \cup B$, $C \setminus A$, $C \setminus B$, если

а) $A = \{1;3;7;15\}$, $B = \{3;7;8;9\}$, $C = \{1;2;3;4;5;7;8;9;15\}$;

б) $A = \{a;b;c;d\}$, $B = \{b;c;f;e\}$, $C = \{a;b;c;d;e;f;g\}$.

35. Найти и указать на числовой прямой промежуток, соответствующий множеству X, если

а) $X = A \setminus B$, где $A = [2;7], B = (1;5)$;

б) $X = C_R(A \cap B)$, где $A = (-\infty;1), B = [3;+\infty)$;

в) $X = (B \setminus A) \cap C$, где $A = [0;3), B = (-1;5], C = (-\infty;1)$;

г) $X = C \cup (B \setminus A)$, где $A = [3;7], B = (1;7], C = (-\infty;0)$.

36. $A = \{1;3;5\}, B = \{5;4;2;1\}, C = \{5;9;3;7;1\}, D = \{2;6\}$. Найти:

а) $(A \times B) \cap (C \times D)$;

б) $(A \times B) \cup (C \times D)$;

в) $(C \cap A) \times (B \cap D)$;

г) $(C \cup A) \times (B \cup D)$.

37. Записать все элементы множества $A \times B$, если

а) $A = \{a;b;c\}, B = \{k;l;m\}$;

б) $A = \{4;b;c\}, B = \{9\}$;

в) $A = \{a;b;c\}, B = \varnothing$.

38. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составить все двузначные числа. Как связано получившееся множество с декартовым произведением $A \times A$, где $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$?

39. Составить множество пар $(x;y) \in A \times B$ для множеств $A = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$ и $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

40. A, B, C – подмножества универсального множества U. Известно, что $A \cap B \cap C = \varnothing$. Построить диаграммы Эйлера-Венна для данных множеств и отметить штриховкой области, изображающие следующие множества:

а) $(A \setminus B) \cap C$;

б) $A \setminus B \cap C$;

в) $A \cup (B \cup C)$;

г) $A \cup B \cup C$.

41. Доказать, что для любых множеств A, B, C справедливы равенства:

а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

б) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

в) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

г) $(A \setminus B)' = A' \cup (A \cap C)$;

д) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$;

е) $A \cap B \setminus C = A \cap (B \setminus C)$.

42. Упростить выражение:

$$\big((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)\big) \setminus \big((A \cup (B \setminus C)) \cap A\big).$$

§ 5. Элементы теории чисел

1. Числовые множества.
2. Множество комплексных чисел: основные понятия.
3. Формы записи комплексных чисел.
4. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
5. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
6. Решение квадратных уравнений.

1. Числовые множества

Множества могут состоять из объектов самой различной природы. Их элементами могут быть буквы, картины, уравнения и, например, числа.

Определение. *Числовым* называется множество, элементами котрого являются числа.

Определение. *Натуральными числами* называются числа, которые используются при счёте. Множество натуральных чисел обозначают символом N.

Любое натуральное число можно записать с помощью десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Число 0 натуральным не является.

Определение. Два числа, отличающиеся друг от друга только знаками, называют *противоположными*.

Для каждого числа есть только одно противоположное число. Число 0 противоположно самому себе.

Определение. *Целыми числами* называются натуральные числа, противоположные им числа и число 0. Множество целых чисел обозначают символом Z.

Определение. *Рациональными числами* называют числа вида $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$. Множество рациональных чисел обозначают символом Q.

Всякое рациональное число является либо целым числом, либо представляется конечной или периодической бесконечной десятичной дробью.

Пример. Числа 3; 0,75 и 0,33333 являются рациональными, так как их можно представить следующими дробями: $3 = {}^3\!/_1$; $0{,}75 = {}^3\!/_4$; $0{,}3333... = {}^1\!/_3$.

Определение. *Иррациональными числами* называются числа, которые нельзя представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$. Множество иррациональных чисел обозначают символом I.

Всякое иррациональное число представляется непериодической бесконечной десятичной дробью. Например, $\sqrt{2} = 1{,}414213...$, $\pi = 3{,}14159...$, $e = 2{,}7182...$

Определение. Рациональные и иррациональные числа составляют множество *действительных* (*вещественных*) *чисел*.

Таким образом, любое действительное число представляется бесконечной десятичной дробью. Множество действительных чисел обозначают символом R.

Множество действительных чисел можно взаимно однозначно отразить на числовой прямой, то есть если каждому действительному числу поставить в соответствие точку числовой прямой, то эти точки полностью заполнят всю числовую прямую.

Запишем связь числовых множеств:
$N \subset Z \subset Q \subset R, \quad I \subset R, \quad R = Q \cup I$.

Пример. Даны множества:

$$A = \{a \mid a \in N,\ 1 \le a < 10\}, \qquad B = \{b \mid b \in Z,\ -2 \le b < 3\},$$
$$C = \{c \mid c \in R,\ -3 < c \le 2{,}6\},\ D = \{d \mid d \in Q,\ d < 2\}.$$

Каким множествам принадлежат числа –2,5; 3; 2,5?

Решение. Видно, что $-2{,}5 \in C$ и $-2{,}5 \in D$, $3 \in A$, $2{,}5 \in C$.

2. Множество комплексных чисел: основные понятия

Уравнение $x^2+1=0$ не имеет действительных корней. Для решения уравнений такого вида придуманы так называемые «комплексные числа».

Определение. *Комплексным числом z* называется число вида $z=a+bi$, где $a,b\in R$, i – *мнимая единица*, квадрат которой равен -1, то есть $i^2=-1$.

Определение. Число a, обозначаемое $a=\operatorname{Re}z$, называется *действительной частью* комплексного числа z; число b, обозначаемое $b=\operatorname{Im}z$, называется *мнимой частью* комплексного числа z.

Если $a=0$, то число $z=bi$ называется *чисто мнимым*; если $b=0$, то число $z=a$ отождествляется с действительным числом a, это означает, что множество R действительных чисел является подмножеством множества C комплексных чисел, то есть $R\subset C$.

Рассмотрим степени мнимой единицы:

$$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=i^2\cdot i=-i,\ i^4=(i^2)^2=1,\ i^5=i^4\cdot i=i,\ \ldots$$

Определение. Два комплексных числа $z=a+bi$ и $\overline{z}=a-bi$, действительные части которых равны, а мнимые противоположны по знаку, называются *комплексно сопряжёнными* числами.

Пример. Числа $2+3i$ и $2-3i$, $4-i$ и $4+i$, $-5i-9$ и $5i-9$ являются комплексно сопряжёнными числами (попарно).

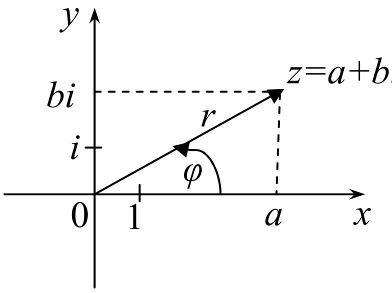
3. Формы записи комплексных чисел

Запись числа z в виде $z=a+bi$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Справедливы формулы

$$\begin{cases} a=r\cos\phi, \\ b=r\sin\phi. \end{cases}$$

Эти формулы позволяют перейти от алгебраической формы комплексного числа $z=a+bi$ к *тригонометрической форме* комплексного числа: $z=r(\cos\phi+i\sin\phi)$.



Имеют место обратные формулы:

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ – модуль комплексного числа (это расстояние от начала координат до точки z),

$$\begin{cases} \sin\phi = \dfrac{b}{r}, \cos\phi = \dfrac{a}{r}, \\ tg\phi = \dfrac{b}{a}, \end{cases}$$

здесь ϕ – аргумент комплексного числа (это направленный угол от положительного направления действительной оси Ox до радиус-вектора точки z).

$z = re^{i\phi}$ – *показательная* (или *экспоненциальная*) *форма* комплексного числа $z = a + bi$.

Пример. Записать в тригонометрической и показательной формах комплексное число $z = -2 + 2i$.

Решение. Запишем действительную и мнимую части данного числа: $a = -2$, $b = 2$.

Найдём его модуль и аргумент:

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ – модуль комплексного числа $z = -2 + 2i$;

$\sin\phi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\phi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

следовательно, $\phi = \dfrac{3\pi}{4}$ – аргумент комплексного числа $z = -2 + 2i$.

Получим $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = 2\sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4})$ – тригонометрическая форма комплексного числа $z = -2 + 2i$;

$z = re^{i\phi} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ – показательная форма комплексного числа $z = -2 + 2i$.

4. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Рассмотрим действия над комплексными числами в алгебраической форме на примере.

Пример. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел

$$z_1 = 2 + 3i \text{ и } z_2 = -5 - i.$$

Решение.

$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-5 - i) = (2 - 5) + (3 - 1)i = -3 + 2i$,

$z_1 - z_2 = (2+3i) - (-5-i) = (2-(-5)) + (3-(-1))i = 7+4i$,

$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(-5-i) = -10-2i-15i-3i^2 = -10-17i-3(-1) =$
$= -7-17i$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{2+3i}{-5-i} = \frac{(2+3i)(-5+i)}{(-5-i)(-5+i)} = \frac{-10+2i-15i+3i^2}{(-5)^2-i^2} =$$
$$= \frac{-10-13i+3(-1)}{25-(-1)} = \frac{-13-13i}{26} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Таким образом, частное двух комплексных чисел находят путём умножения числителя и знаменателя на число, комплексно сопряжённое знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

5. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Пусть даны комплексные числа в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \text{ и } z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2).$$

1) Произведение $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)]$.

2) Частное от деления $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2)]$.

3) Возведение в степень $z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$, $n \in N$ – формула Муавра.

4) Извлечение корня: корень n-й степени из всякого комплексного числа имеет ровно n различных значений:

$$\sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi+2\pi k}{n}\right),\ k = \overline{0, n-1},\ n \in N.$$

6. Решение квадратных уравнений

Пример. Решить уравнение $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Найдём дискриминант уравнения:

$D = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 = -1 \cdot 4 = i^2 \cdot 2^2 = (2i)^2$,

откуда получим $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$ – два комплексно сопряжённых корня.

В общем случае используют формулу для квадратного корня из комплексного числа $z = a + bi \neq 0$:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\cdot signb\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right],$$

где $signb=\begin{cases}1 & при\ b>0,\\ -1 & при\ b<0,\\ 0 & при\ b=0\end{cases}$ – знак числа b.

Пример. Решить уравнение $2ix^2-(2+i)x+1=0$.

Здесь $a=2i$, $b=-(2+i)$, $c=1$. Найдём дискриминант уравнения:

$D=(2+i)^2-4\cdot 2i=4+4i-1-8i=3-4i$.

Тогда получим

$$\sqrt{3-4i}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}+3}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}-3}{2}}\right]=$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{25}+3}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{25}-3}{2}}\right]=\pm(2-i).$$

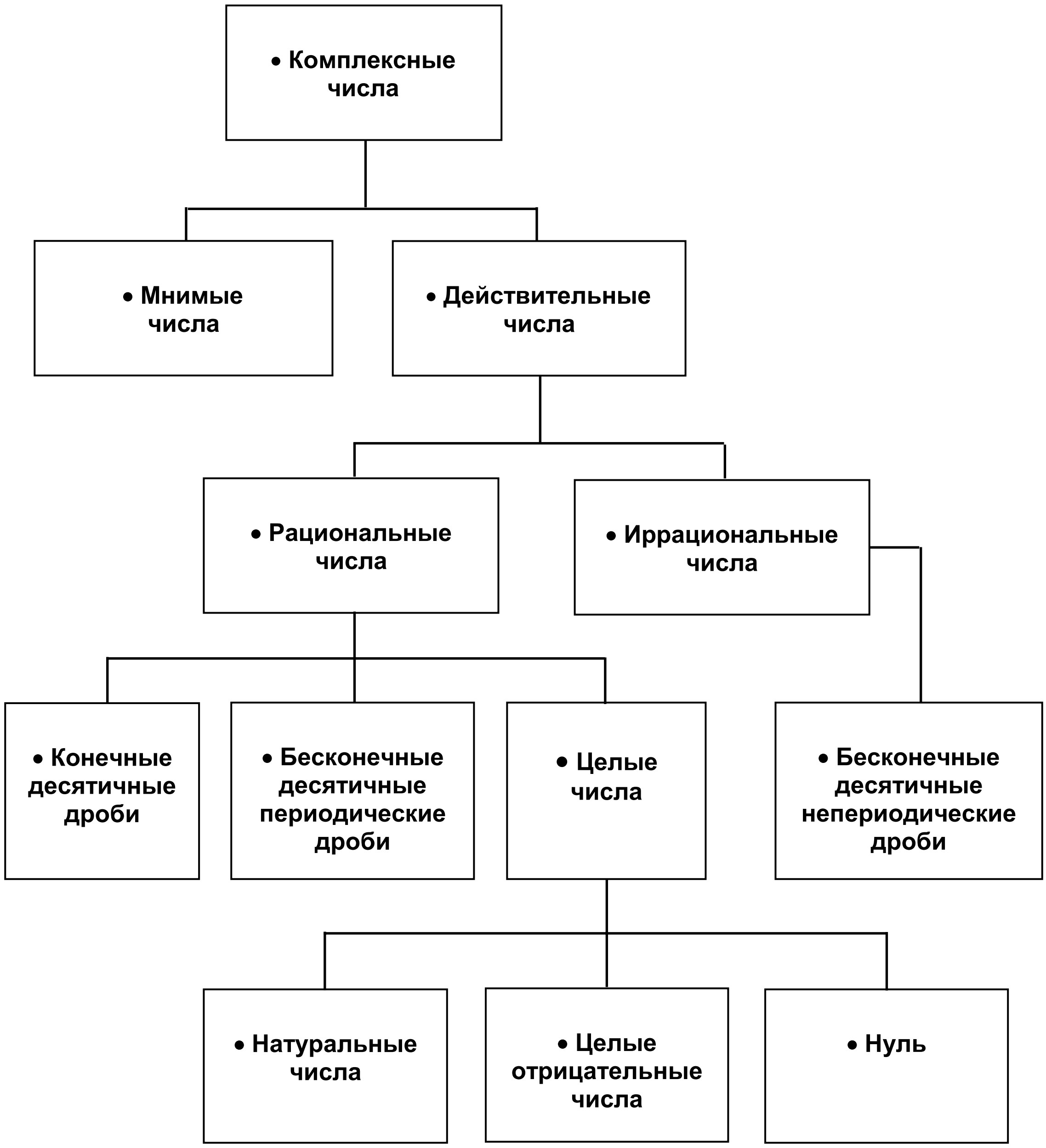
Следовательно, $x_{1,2}=\dfrac{(2+i)\pm(2-i)}{2\cdot 2i}$, откуда

$$x_1=\frac{2+i+2-i}{4i}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i,\ x_2=\frac{2+i-2+i}{4i}=\frac{1}{2}.$$

Подводя итог сказанному, приведём схему генезиса чисел. Как видим, в результате длительного и сложного развития сложилась весьма стройная система числовых множеств (см. стр. 31).

Контрольные вопросы к § 5

1. Какие числа называются натуральными, целыми, рациональным, иррациональными, действительными? Как обозначаются эти множества? Привести примеры.
2. Что такое мнимая единица?
3. Какие числа называются комплексными?
4. Какие комплексные числа называются комплексно сопряжёнными?



5. Что называется тригонометрической формой комплексного числа z?

6. Что такое модуль и аргумент комплексного числа z?

7. Какими формулами выражаются действительная и мнимая части комплексного числа z через его модуль и аргумент?

8. Что называется показательной формой комплексного числа z?

9. Как определяется сумма (разность), произведение комплексных чисел в алгебраической форме?

10. По какому правилу производится деление комплексных чисел в алгебраической форме?

11. Сформулировать правило умножения (деления) комплексных чисел в тригонометрической форме.

12. Сформулировать правило возведения в степень комплексного числа в тригонометрической форме. Записать формулу Муавра.

13. Сколько значений имеет корень n-й степени из комплексного числа z? Записать формулу для вычисления корня степени n.

14. По какой формуле вычисляется квадратный корень из комплексного числа $z = a + bi$, если: а) $b \neq 0$; б) $b = 0$.

Задачи

1. Известно, что $a \in N$. Можно ли утверждать, что $a \in Z$? $a \in R$? Верно ли, что если $a \in Z$, то $a \in N$?

2. Записать к каким числовым множествам N, Z, Q, I или R принадлежат следующие числа:

$$0,\ -1,\ \frac{2}{7},\ \sqrt{3},\ \pi,\ \frac{8}{1},\ -\sqrt{25},\ e.$$

3. Задать перечислением элементов множество A, состоящее из:

а) натуральных делителей числа 26;

б) целых делителей числа 10;

в) целых делителей числа 70, являющихся двузначными числами.

4. Указать первые четыре элемента множества

$$A = \{\sqrt{n} + \frac{1}{n} + 1 \,|\, n \in N\}.$$

5. Записать множество A перечислением его элементов, если

$$A = \{x \,|\, x \in Z, -1 < x \leq 4\}.$$

6. Изобразить на координатной прямой множество A, если

а) $A = \{x \,|\, x \in N, x < 7\}$; б) $A = \{x \,|\, x \in R, x < 5{,}7\}$;

в) $A = \{x \,|\, x \in R, -3 < x \leq 8\}$; г) $A = \{x \,|\, x \in N, 2 \leq x < 9\}$.

7. Найти множества $A \cap B$, $C \cap B$, $A \cup B$, $C \setminus A$, $C \setminus B$, $A \setminus C$, если $A = \{x \,|\, x \in N, x < 10\}$, $B = \{1;3;5\}$, $C = \{x \,|\, x \in N, 5 < x < 10\}$.

8. Записать в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

а) $z = 1 + i$; б) $z = -2$; в) $z = 3i$;

г) $z=2-2i$; д) $z=-\sqrt{3}+i$; е) $z=-5i$.

9. Выполнить указанные действия:

а) $(2+3i)(3-2i)+(2-3i)(3+2i)$; б) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{3}{2-i}$;

в) $\dfrac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\dfrac{(1-i)(3-i)}{3+i}$; г) $\dfrac{4+i}{2-i}+\dfrac{5-3i}{3+i}$.

10. Упростить выражение:

а) $\dfrac{(1+i)(2-3i)+i^4}{3-i}$; б) $\left(1-\dfrac{3}{2+i}\right)^2$.

11. Вычислить:

а) $4(\cos 1^\circ + i\sin 1^\circ)\cdot 5(\cos 7^\circ + i\sin 7^\circ)$;

б) $\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot 9\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$;

в) $10(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ) : 4(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)$;

г) $(4(\cos 2^\circ + i\sin 2^\circ))^5$;

д) $\left(\sqrt{3}+i\right)^4$; е) $\sqrt[3]{2+2i}$;

ж) $\sqrt[5]{-1}$; з) $\sqrt[4]{i}$.

12. Вычислить квадратные корни:

а) $\sqrt{-7-24i}$; б) $\sqrt{24+70i}$; в) $\sqrt{-144}$.

13. Решить квадратные уравнения:

а) $x^2+9=0$; б) $x^2-2x+10=0$;

в) $x^2+5=0$; г) $2x^2-2x+1=0$;

д) $ix^2-(i-1)x+1+2i=0$.

Домашнее задание

14. Записать множество A перечислением его элементов, если

$$A=\{x\in N \mid 1<x<8\}.$$

15. Записать из данных множеств последовательность подмножеств:

N – множество натуральных чисел,

Z – множество целых чисел,

Q – множество рациональных чисел,

R – множество действительных чисел,

A – множество всех нечётных натуральных чисел,

B – множество всех натуральных чисел, делящихся на 3.

16. Записать в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

а) $z = 1 + \sqrt{3}i$; б) $z = 3$;

в) $z = 2 - i$; г) $z = -8i$.

17. Выполнить действия:

а) $(5 + 2i) + (3 - 4i)$; б) $(a + bi)(a - bi)$;

в) $\frac{2i}{1+i}$; г) $\frac{1+2i}{2-3i}$.

18. Упростить выражение $\frac{1+i}{(1-i)(2-i)+i^3}$.

19. Вычислить:

а) $6(\cos 9^\circ + i\sin 9^\circ) \cdot 3(\cos 31^\circ + i\sin 31^\circ) \cdot \frac{1}{18}(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)$;

б) $7\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) : 14(\cos\pi + i\sin\pi)$;

в) $(1 - i)^5$; г) $\sqrt[3]{-4}$.

20. Вычислить квадратные корни:

а) $\sqrt{2 + i\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{-9}$.

21. Решить квадратные уравнения:

а) $x^2 + 100 = 0$; б) $x^2 + 2x + 5 = 0$;

в) $50x^2 + 10x + 1 = 0$; г) $7x^2 - 12x + 9 = 0$;

д) $x^2 - (5 + 2i)x + 5 + 5i = 0$.

Дополнительные задачи

22. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $z = 1$; б) $z = -3 + \sqrt{3}i$;

в) $z = -i$; г) $z = -1 - \sqrt{3}i$;

д) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$; е) $z = 1 - i$;

ж) $z = 3 + 3i$; з) $z = -1 + i$;

и) $z = \sqrt{3} + 3i$; к) $z = -8$.

23. Выполнить указанные действия:

а) $(2+3i)(1-i)$; б) $(5+2i)(3-4i)$;

в) $\dfrac{1+i}{1-i}$; г) $\dfrac{4+3i}{5+2i}$;

д) $\dfrac{(1+i)(4+i)}{4-i}-\dfrac{(1-i)(4-i)}{4+i}$; е) $\dfrac{(1+i)(2+i)}{2-i}-\dfrac{(1-i)(2-i)}{2+i}$.

24. Вычислить:

а) $\dfrac{z_1z_2}{z_3}$, если $z_1=2+i,\quad z_2=2-i,\quad z_3=4-3i;$

б) $\dfrac{z_1}{z_2z_3}$, если $z_1=1+i,\quad z_2=\sqrt{3}+i,\quad z_3=1+i\sqrt{3}.$

25. Вычислить:

а) $\left(\cos 9^\circ+i\sin 9^\circ\right)^{10}$; б) $\left(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ\right)^{27}$;

в) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{6}$; г) $\left(-1+i\right)^{5}$;

д) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$; е) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{3}$;

ж) $\left(1+i\right)^{10}$; з) $\left(1-i\right)^{6}$.

26. Найти все значения корней:

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt{1+i}$; в) $\sqrt[3]{i}$;

г) $\sqrt{i}$; д) $\sqrt{-3-\sqrt{3}i}$; е) $\sqrt[3]{-1+i}$.

27. Решить уравнения и проверить подстановкой корней в уравнение:

а) $x^2+25=0$; б) $x^2-2x+2=0$;

в) $x^2-2x+5=0$; г) $x^2+4x+13=0$.

§ 6. Основы математической логики

1. Основные понятия математической логики.
2. Логические операции над высказываниями.
3. Формулы алгебры высказываний.
4. Законы алгебры высказываний.
5. Нормальные формы для формул алгебры высказываний.

6. Приложение алгебры высказываний к логико-математической практике.

1. Основные понятия математической логики

Математическая логика – это раздел математики, изучающий математические обозначения, формальные системы, доказуемость математических суждений, природу математического доказательства в целом и другие аспекты оснований математики; это логика, развиваемая математическими методами.

Основным понятием математической логики является понятие высказывания.

Определение. *Высказывание* – это утверждение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно.

Высказывания обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, ...

Пример. A – «Ока – приток Волги» – истинное высказывание; B – «$2+2=5$» – ложное высказывание; «$x>6$» не является высказыванием.

Вопросительное и побудительное предложения не являются высказываниями.

Любое высказывание бывает либо истинным, либо ложным; быть одновременно и тем, и другим оно не может.

2. Логические операции над высказываниями

Определение. Высказывание называется *простым*, если никакая его часть сама не является высказыванием; в противном случае высказывание называется *сложным*.

Сложные высказывания образуются из простых при помощи союзов «и», «или», «если,… то», «тогда и только тогда» и т. д. В математической логике эти союзы называются *логическими связками.*

Истинность сложного высказывания зависит от того, истинны или ложны входящие в него простые высказывания. Изучение этой зависимости является предметом логики высказываний.

Определение. *Отрицание* высказывания A – это высказывание $\overline{A}$ (или $\neg A$) (читается «**не** A», «**неверно**, что A»), которое истинно, когда исходное высказывание A ложно, и ложно, когда A истинно.

Пример. C – «Маша любит кашу», $\overline{C}$ – «**Неверно**, что Маша любит кашу».

Определение. *Конъюнкция* высказываний A и B (логическое умножение) – это высказывание $A \wedge B$ (читается «A **и** B»), которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно во всех остальных случаях.

Пример. Для высказываний A и B (см. пример п. 1) конъюнкцией является предложение $A \wedge B$ – «Ока – приток Волги **и** $2+2=5$», которое ложно.

Определение. *Дизъюнкция* высказываний A и B (логическая сумма) – это высказывание $A \vee B$ (читается «A **или** B»), которое ложно, когда ложны оба высказывания A и B, и истинно в остальных случаях.

Пример. Для высказываний A и B (см. пример п. 1) дизъюнкцией является предложение $A \vee B$ – «Ока – приток Волги **или** $2+2=5$», которое истинно.

Определение. *Импликация* высказываний A и B – это высказывание $A \to B$ (читается «**из** A **следует** B», либо «**если** A, **то** B»), которое ложно, когда A – истинно, B – ложно, и истинно во всех остальных случаях.

Пример. Для высказываний A и B (см. пример п. 1) импликацией является предложение $A \to B$ – «**если** Ока – приток Волги, **то** $2+2=5$», которое ложно.

Определение. *Эквиваленция* высказываний A и B – это высказывание $A \leftrightarrow B$ (читается «A **эквивалентно** B», «A **тогда и только тогда, когда** B», «A **необходимо** и **достаточно** для B», «A **равносильно** B»), которое истинно, когда оба высказывания истинны или оба ложны, и ложно в остальных случаях.

Пример. Для высказываний A и B (см. пример п. 1) эквиваленцией является предложение $A \leftrightarrow B$ – «Ока – приток Волги **тогда и только тогда, когда** $2+2=5$», которое ложно.

Результаты всех логических операций можно представить в виде следующей *таблицы истинности* (логические значения: истина=1, ложь=0):

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$	$\overline{A}$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

3. Формулы алгебры высказываний

Алгебра высказываний – это раздел математической логики, в котором изучаются логические операции над высказываниями.

Рассмотрим сложное высказывание $((A \wedge B) \vee \overline{A}) \leftrightarrow B$, где A и B – простые высказывания (см. пример п. 1). Пусть вместо конкретных высказываний A и B взяты переменные, которые назовём *пропозиционными*, тогда получим формулу алгебры высказываний $((X \wedge Y) \vee \overline{X}) \leftrightarrow Y$, где X, Y – некоторые *произвольные* высказывания.

Используя *пропозиционные переменные* X, Y, Z, … , конкретные высказывания A, B, C, … , а также знаки логических операций $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ и логические константы («1», «0»), можно записать *формулы* алгебры высказываний. Если вместо пропозиционных переменных подставить конкретные высказывания, то формула превратится в некоторое сложное высказывание.

Для каждой *формулы* можно составить *таблицу истинности*. При их составлении необходимо учитывать порядок выполняемых действий. Если в формуле нет скобок, то логические операции выполняются в следующем порядке: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция.

Пример. Составить таблицу истинности для формулы $(A \vee B) \wedge (\overline{B} \rightarrow A) \leftrightarrow \overline{A} \equiv (*)$.

Решение.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \vee B$	$\overline{B} \rightarrow A$	$(A \vee B) \wedge (\overline{B} \rightarrow A)$	*
1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0

Определение. Формула называется *тождественно истинной* или *тавтологией*, если она обращается в истинное высказывание при всех наборах значений переменных.

Определение. Формула называется *тождественно ложной* или *противоречием*, если она обращается в ложное высказывание при всех наборах значений переменных.

Пример. $A \wedge \overline{A}$ – противоречие, $A \vee \overline{A}$ – тавтология.

4. Законы алгебры высказываний

Определение. Две формулы называются *равносильными* (*тождественными*), если они принимают одинаковые логические значения при одинаковых наборах значений входящих в них выражений.

Равносильные формулы обозначаются знаком "$\equiv$".

Часто применяющиеся основные равносильности называются *законами алгебры высказываний*:

1. $\overline{\overline{A}} \equiv A$ – закон двойного отрицания.

2. $A \wedge \overline{A} \equiv 0$ – закон противоречия.

3. $A \vee \overline{A} \equiv 1$ – закон исключенного третьего.

4. $A \wedge 1 \equiv A$, $A \wedge 0 \equiv 0$, $A \vee 1 \equiv 1$, $A \vee 0 \equiv A$ – законы сочленения переменной с константой.

5. $A \wedge A \equiv A$, $A \vee A \equiv A$ – закон идемпотентности.

6. $A \wedge B \equiv B \wedge A$, $A \vee B \equiv B \vee A$ – закон коммутативности.

7. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$, $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ – законы ассоциативности.

8. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ – законы дистрибутивности.

9. $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$, $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$ – законы де Моргана.

10. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$, $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ – законы поглощения.

11. $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) \equiv B$, $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) \equiv B$ – законы склеивания.

12. $A \leftrightarrow A \equiv 1$, $A \to A \equiv 1$ – законы тождества.

13. $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$ – закон замены импликации на дизъюнкцию.

14. $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$ – закон замены эквиваленции на импликации.

15. $A \to B \equiv \overline{B} \to \overline{A}$ – закон контрапозиции.

Доказать эти законы можно при помощи таблиц истинности.

Пример. Докажем закон № 6 алгебры высказываний $A \wedge B \equiv B \wedge A$, составив таблицу истинности.

Доказательство.

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

В столбцах, соответствующих левой и правой частям данного закона, получены одинаковые логические значения, следовательно, закон доказан.

Используя основные равносильности, можно от одной формулы переходить к равносильной ей формуле. Такой переход называется *равносильным преобразованием* исходной формулы. Равносильные преобразования формул применяются, прежде всего, для упрощения формул.

5. Нормальные формы для формул алгебры высказываний

Пользуясь законами логики высказываний, для любой формулы алгебры высказываний можно получить множество равносильных ей формул.

Для классификации формул им придают *совершенную дизъюнктивную нормальную форму* (СДНФ) или *совершенную конъюнктивную нормальную форму* (СКНФ).

Определение. *Элементарной конъюнкцией* (*дизъюнкцией*) высказываний системы $\{A_1,\ A_2, \dots A_n\}$ называется любая конъюнкция (дизъюнкция) высказываний или их отрицаний, взятых из этой системы.

Одно высказывание может быть использовано несколько раз.

Определение. *Полной элементарной конъюнкцией* (*дизъюнкцией*) называется элементарная конъюнкция (дизъюнкция), в которую входит каждое высказывание системы и при этом только один раз.

Определение. Формула $F(A_1,\ A_2, \dots A_n)$ называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ) от переменных (высказываний) $A_1,\ A_2, \dots\ A_n$, если она является конъюнкцией различных полных элементарных дизъюнкций.

Пример. $F = (A \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee D)$ – СКНФ от переменных системы $\{A,\ B,\ C,\ D\}$.

Определение. Формула $F(A_1,\ A_2, \dots A_n)$ называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ) от переменных (высказываний) $A_1,\ A_2, \dots\ A_n$, если она является дизъюнкцией различных полных элементарных конъюнкций.

Пример. $F = (A \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{D}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D)$ – СДНФ от переменных системы $\{A,\ B,\ C,\ D\}$.

Поясним на примере составление этих форм.

Пример. Составить СКНФ и СДНФ для формулы $(A \to \overline{B \wedge C}) \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B} \equiv (*)$.

Решение. Составим для данной формулы таблицу истинности:

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$B \wedge C$	$\overline{B \wedge C}$	$A \to \overline{B \wedge C}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	*	
1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	$A \wedge B \wedge C$
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C$
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	$A \wedge \overline{B} \wedge C$
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	$A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	$\overline{A} \wedge B \wedge C$
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	$\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$

Для строк, соответствующих значениям «1» данной формулы (*), составляем конъюнкции переменных или их отрицаний: для этого переменные, у которых в соответствующей строке стоит «0», нужно взять с отрицанием, а оставшиеся переменные – без отрицания. В результате получим 7 конъюнкций. Дизъюнкция этих конъюнкций и будет являться СДНФ данной формулы:

СДНФ: $F = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C) \vee$

$$\vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}).$$

Для строк, соответствующих значениям «0» данной формулы (*), составляем дизъюнкции переменных: для этого переменные, у которых в соответствующей строке стоит «1», нужно взять с отрицанием, а оставшиеся переменные – без отрицания. Тогда конъюнкция этих дизъюнкций и будет являться СКНФ данной формулы:

$$\text{СКНФ: } F = \overline{A} \vee \overline{B} \vee C.$$

Замечания.

1. Для каждой формулы, не являющейся противоречием, можно составить единственную СДНФ.

2. Для каждой формулы, не являющейся тавтологией, можно составить единственную СКНФ.

6. Приложение алгебры высказываний к логико-математической практике

Многие математические теоремы имеют структуру, выражаемую формулой $X \to Y$, где утверждение X называется *условием* теоремы, Y – *заключением*.

Примем её за *прямую* теорему. Из неё можно получить новые теоремы:

$Y \to X$ – *обратная* теорема,

$\overline{X} \to \overline{Y}$ – *противоположная* теорема,

$\overline{Y} \to \overline{X}$ – *обратная противоположной* теореме.

Из закона № 15 логики высказываний следует, что если верна *прямая теорема*, то верна и *обратная противоположной теорема* и наоборот. Аналогично, если верна *обратная теорема*, то верна и *противоположная теорема* и наоборот.

Определение. Для теоремы $X \to Y$ высказывание Y называется *необходимым условием* для высказывания X, а высказывание X называется *достаточным условием* для Y.

Контрольные вопросы к § 6

1. Что является предметом математической логики?
2. Дайте определение высказывания.
3. Дайте определение отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции высказываний.
4. Что является предметом алгебры высказываний?
5. Как образуются формулы алгебры высказываний?
6. Какая формула называется тавтологией (противоречием)?
7. Дайте определение равносильных формул.
8. Сформулируйте законы алгебры высказываний.
9. Дайте определение совершенной конъюнктивной нормальной формы и совершенной дизъюнктивной нормальной формы.
10. Какие четыре вида теорем существуют?

Задачи

1. Высказывание A – «Все яблоки фрукты», высказывание B – «Сегодня воскресенье». Прочитать следующие высказывания:

а) отрицание A, B; б) конъюнкция A и B;

в) дизъюнкция A и B; г) импликация A и B;
д) эквиваленция A и B; е) импликация B и A.

Найти логическое значение каждого из получившихся высказываний.

2. Найти логическое значение высказываний:

а) $|2-6|=|2|-|6|$; б) $8 \geq 8$; в) $0 \in N$;

г) $-9\dfrac{1}{3} \in Q$; д) $6 \cdot 8 = 58$; е) $\sqrt{25} = 5{,}0$.

3. Определить логическое значение высказываний:

а) «Если $8 > 8$ или $8^2 + 1 \geq 65$, то 12 делится на 2»;

б) «Если 8 чётно, то 3 чётно»;

в) «Если 13 делится на 5, то 13^2 делится на 5»;

г) «$0 < 6$ и $1 < 3$»;

д) «$2 + 2 = 9$ тогда и только тогда, когда $3 < 7$»;

е) «Если $10 > 8$ и $11 > 5$, то $2 \cdot 3 = 5$»;

ж) «5 – простое число или 8 – простое число»;

з) «Неверно, что 9 равно кубу числа 3».

4. Проверить, является ли формула тавтологией:

а) $(\overline{A} \wedge B) \to (A \leftrightarrow \overline{B})$; б) $(\overline{A \wedge B}) \leftrightarrow (\overline{A} \vee \overline{B})$;

в) $(A \wedge B \to C) \leftrightarrow (B \vee C \to \overline{A})$; г) $(A \to B) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C})$.

5. Найти совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ) и совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ) для формул:

а) $(\overline{A} \wedge B) \wedge (\overline{A \leftrightarrow \overline{B}})$; б) $(A \wedge \overline{B}) \leftrightarrow (C \to A)$;

в) $(A \to \overline{B}) \wedge C$; г) $(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (\overline{A \to C})$.

6. Образовать для данной теоремы обратную теорему, противоположную теорему и обратную противоположной теорему. Выяснить справедливость всех теорем.

а) «Если число n делится на 10, то оно делится на 5».

б) «Если у параллелограмма диагонали перпендикулярны, то он является ромбом».

7. Иванов, Петров, Сидоров подозреваются в совершении преступления. В ходе расследования они дали следующие показания:

Иванов: «Петров виновен, а Сидоров – нет»;

Петров: «Если Иванов виновен, то виновен и Сидоров (они всегда действуют сообща)»;

Сидоров: «Я невиновен, но хотя бы один из них двоих виновен».

Необходимо установить:

а) Совместны ли показания всех троих подозреваемых (могут ли они быть одновременно истинными)?

б) Предполагая, что показания истинны, указать, кто виновен, а кто нет.

в) Если все трое невиновны, то кто лжесвидетельствует?

Домашнее задание

8. Определить логическое значение высказываний:
а) «Если 8 чётно, то 8 делится на 3»;
б) «$3+3=9$ тогда и только тогда, когда $2<7$»;
в) «Если Солнце – планета или $-10>9$, то 3 – простое число»;
г) «Снег чёрный и Сегодня 1 августа».

9. Доказать законы логики высказываний (составить таблицы истинности):

а) $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$; б) $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$;

в) $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$; г) $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$;

д) $A \to B \equiv \overline{B} \to \overline{A}$.

10. Найти совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ) и совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ) для формул:

а) $(\overline{A \to B}) \to (A \wedge B)$; б) $((\overline{A} \wedge \overline{B}) \to C) \leftrightarrow (\overline{C} \to B)$.

11. Дана теорема «Если в треугольнике все стороны равны, то и все углы равны». Образовать для данной теоремы обратную теорему, противоположную теорему и обратную противоположной теорему. Выяснить справедливость всех теорем.

Дополнительные задачи

12. Среди следующих предложений указать высказывания и определить их логическое значение:

а) «Число a целое»;

б) «При делении 30 на 6 получается остаток 4»;

в) «$x < 30$»;

г) «В любом ромбе стороны равны»;

д) «$25 \cdot 2 - 15 = 35$»;

е) «$(20 + x) \cdot 2 = 50$»;

ж) «$2x + 7 < 10$»;

з) «Некоторые числа являются решением неравенства $2x < 7$».

13. Сформулировать отрицания следующих высказываний:

а) «Число 100 натуральное»;

б) «Число 15 делится на 6»;

в) «Ромб $ABCD$ не является четырёхугольником»;

г) «$2 > 5$»;

д) «В любом треугольнике ΔABC хотя бы один из углов прямой».

14. Составить таблицу истинности для формул:

а) $A \to (B \wedge C)$; б) $\overline{A} \wedge C \leftrightarrow D$;

в) $C \leftrightarrow (\overline{D} \wedge \overline{B})$; г) $A \leftrightarrow (B \wedge C)$;

д) $\overline{A \wedge B} \to C$; е) $A \vee \overline{B} \to C$;

ж) $C \leftrightarrow \overline{A} \wedge B$; з) $A \vee (B \wedge C)$;

и) $\overline{A} \leftrightarrow (B \wedge \overline{C})$; к) $(B \vee C) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C})$.

15. Показать, что высказывание $(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$ логически истинно, а высказывание $(A \leftrightarrow B) \to (A \vee B)$ – нет.

16. Проверить, является ли формула тавтологией:

а) $(A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \to B)$; б) $(A \vee \overline{B}) \to (B \wedge \overline{A})$;

в) $\overline{A} \to (A \to B)$; г) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$.

17. Доказать эквивалентность

$$A \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

18. С помощью таблиц истинности проверить, являются ли эквивалентными формулы $\phi_1 = A \wedge (B \to C)$ и $\phi_2 = (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

19. Определить для каждого из следующих высказываний, будет ли оно тождественно истинным, тождественно ложным или ни тем, ни другим:

а) $A \leftrightarrow A$; б) $A \leftrightarrow \overline{A}$;
в) $(A \vee B) \leftrightarrow (A \wedge B)$; г) $(A \to B) \to A$;
д) $((A \to B) \to A) \to A$; е) $(A \to \overline{B}) \to (B \to \overline{A})$.

20. Доказать равносильность при помощи основных законов алгебры высказываний:

а) $\overline{A \to B} \equiv A \wedge \overline{B}$;

б) $\overline{(A \wedge \overline{B}) \vee (B \wedge \overline{C})} \equiv (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

21. Преобразовать формулу $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow \overline{B \to A}$ к виду, не содержащему импликацию и эквиваленцию.

22. Выделить условие и заключение в каждой из теорем:

а) «Если четырёхугольник – параллелограмм, то в нём противолежащие стороны попарно равны»;

б) «Всякий параллелограмм имеет центр симметрии»;

в) «Дуги, заключённые между равными хордами, равны»;

г) «Сумма двух чётных чисел – число чётное»;

д) «Для того, чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 5».

23. Дана теорема «Если каждое слагаемое делится на 3, то и сумма делится на 3». Образовать для данной теоремы обратную теорему, противоположную теорему и обратную противоположной теорему. Выяснить справедливость всех теорем.

24. Дана теорема «Во всяком прямоугольнике диагонали равны». Какие из следующих теорем равносильны ей?

а) «Если четырёхугольник – прямоугольник, то его диагонали равны».

б) «Если диагонали в четырёхугольнике не равны, то четырёхугольник не является прямоугольником».

в) «Если диагонали в четырёхугольнике равны, то этот четырёхугольник – прямоугольник».

г) «Если четырёхугольник не является прямоугольником, то его диагонали не равны».

25. В теореме «В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны» выделить условие и заключение. Сформулировать эту теорему при помощи слов «следует», «любой», «необходимо», «достаточно».

26. Дана теорема «В равнобедренной трапеции диагонали равны». Сформулировать теорему, равносильную теореме, обратной данной.

27. Каждую из следующих теорем разбить на две так, чтобы одна из них выражала прямую теорему, а другая – обратную.

а) «Для того чтобы натуральное число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3».

б) «Для того чтобы четырёхугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его противолежащие стороны были попарно равны».

в) «Четырёхугольник является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны».

28. Сформулировать утверждение «Треугольник ABC является прямоугольным тогда и только тогда, когда один из его углов прямой» в виде конъюнкции двух взаимно обратных утверждений.

§ 7. Комбинаторные методы обработки информации

1. Правила суммы и произведения.
2. Размещения, перестановки, сочетания.

1. Правила суммы и произведения

На практике часто приходится выбирать из некоторого множества объектов подмножества элементов, обладающих теми или иными свойствами, располагать элементы одного или нескольких множеств в определённом порядке и т. д. Поскольку в таких задачах речь идёт о тех или иных комбинациях объектов, их называют «комбинаторные задачи».

Комбинаторика[*] – это раздел математики, в котором рассматриваются задачи о тех или иных комбинациях объектов.

[*] Термин «комбинаторика» происходит от латинского «combina» – сочетать, соединять.

Рассмотрим два основных закона, с помощью которых решаются многие задачи комбинаторики – правила суммы и произведения.

Правило суммы. Если имеется n попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, содержащих $m_1, m_2, \ldots, m_n$ элементов соответственно, то число способов, которыми можно выбрать <u>один</u> элемент <u>из всех</u> этих множеств, равно

$$S = m_1 + m_2 + \ldots + m_n.$$

Пример. На первый курс факультета набрали 3 группы студентов. В первой группе учится 25 человек, во второй – 30, в третьей – 20. Сколькими способами можно выбрать одного студента из всех трёх групп?

Решение. Из первой группы одного студента можно выбрать 25 способами, из второй – 30 способами, из третьей – 20 способами. Тогда согласно правилу суммы, надо сложить эти три числа: $S = 25 + 30 + 20 = 75$. Итак, выбрать одного студента из трёх групп можно 75 способами.

Правило произведения. Пусть имеется n попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, содержащих $m_1, m_2, \ldots, m_n$ элементов соответственно. Элемент $a_1 \in A_1$ можно выбрать m_1 способами, при любом выборе $a_1 \in A_1$ элемент $a_2 \in A_2$ можно выбрать m_2 способами и т. д., элемент $a_n \in A_n$ можно выбрать m_n способами. Тогда n элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ можно выбрать $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ способами:

$$P = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n.$$

Пример. На первый курс факультета набрали 3 группы студентов. В первой группе учится 25 человек, во второй – 30, в третьей – 20. Сколькими способами можно выбрать трёх студентов по одному из каждой группы?

Решение. Из первой группы одного студента можно выбрать 25 способами, из второй – 30 способами, из третьей – 20 способами. Согласно правилу произведения, надо перемножить эти числа: $P = 25 \cdot 30 \cdot 20 = 15000$. Итак, существует 15 000 способов выбора трёх студентов по одному из каждой группы.

Определение. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют *факториалом числа n*:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Заметим, что 0! считается равным 1.

2. Размещения, перестановки, сочетания

В разных задачах в описываемых наборах объектов элементы могут повторяться, а могут и не повторяться. В зависимости от этого различают:

1) *комбинаторику без повторений*;

2) *комбинаторику с повторениями*.

И для первого, и для второго случая различают по три основных вида комбинаций объектов:

а) *размещения*;

б) *перестановки*;

в) *сочетания*.

Рассмотрим все шесть имеющихся случаев.

***1.* Определение.** *Размещением без повторений* из n элементов по k элементам ($k < n$) называется множество упорядоченных наборов, состоящих из k элементов, взятых из n элементов, причём в этих наборах элементы не повторяются. Число таких наборов определяется по формуле:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (1)$$

Пример. В группе из 25 студентов надо выбрать старосту, профорга и культорга. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как из 25 человек выбираются трое человек с различной специализацией (староста, профорг, культорг), то порядок людей в наборе важен, следовательно, имеем дело с числом размещений без повторений из 25 по 3, то есть

$$A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = \frac{25!}{22!} = 13800.$$

Итак, троих активистов из 25 человек можно выбрать 13800 способами.

***2.* Определение.** *Размещением с повторениями* из n элементов по k элементам называется множество упорядоченных наборов, состоящих из k элементов, взятых из n элементов, причём в этих наборах элементы могут повторяться. Число таких наборов определяется по формуле:

$$\overline{A}_n^k = n^k. \qquad (2)$$

Пример. Группа из 25 студентов сдаёт экзамен, по которому студенты могут получить оценки: 2, 3, 4, 5. Сколькими способами может быть заполнена экзаменационная ведомость?

Решение. Для каждого студента выбирается одна оценка из четырёх, всего выбор делается 25 раз. Возможны повторения, так как каждая оценка может быть выбрана любое количество раз. Порядок важен, так как он показывает, какому именно студенту достаётся выбранная оценка. Следовательно, число способов есть число размещений с повторениями из 4 по 25:

$$\overline{A}_4^{25} = 4^{25} = 1{,}126 \cdot 10^{15}.$$

Итак, экзаменационная ведомость может быть заполнена $1{,}126 \cdot 10^{15}$ способами.

3. Определение. *Перестановкой без повторений* из n элементов называется множество всевозможных перестановок данных n элементов.

Перестановка без повторений – частный случай размещения без повторений при $k = n$. Число таких наборов определяется по формуле:

$$P_n = n! \qquad (3)$$

Иными словами, число способов упорядочить данное множество, состоящее из n элементов, равно $P_n = n!$

Пример. Сколькими способами можно расставить в шеренгу студентов группы из 8 человек?

Решение. Число способов есть число перестановок без повторений из 8 элементов, то есть

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320.$$

Итак, расставить в шеренгу студентов группы из 8 человек можно 40320 способами.

4. Определение. *Перестановкой с повторениями* набора элементов $(n_1, n_2, ..., n_k)$ (где 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент повторяется n_2 раз и т. д., k-й элемент повторяется n_k раз) называется множество выборок длины $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$, в которых 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент повторяется n_2 раз и т. д., k-й элемент повторяется n_k раз. Число таких наборов определяется по формуле:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}. \qquad (4)$$

Пример. Сколько новых «слов» можно получить перестановкой букв слова МАТЕМАТИКА?

Решение. Так как мы переставляем буквы одного слова, то имеем перестановку. В данном слове буквы повторяются, а значит, перестановка будет с повторениями. В слове МАТЕМАТИКА всего 10 букв, из них: буква «М» присутствует 2 раза, буква «А» – 3 раза, буква «Т» – 2 раза, буквы «Е», «И», «К» по одному разу. Получаем

$$P_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 151200.$$

Итак, всего можно получить 151200 новых «слов».

5. Определение. *Сочетанием без повторений* из n элементов по k элементам ($k < n$) называется множество **не**<u>упорядоченных</u> наборов, состоящих из k элементов, взятых из n элементов, причём в этих наборах элементы <u>не повторяются</u>. Число таких наборов определяется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (5)$$

Имеют место следующие соотношения:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

2) $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Пример. Сколькими способами из группы в 25 человек можно выбрать баскетбольную команду из пяти человек?

Решение. Так как из 25 человек выбираются 5 человек и порядок, в котором выбираются члены команды, не важен, то число способов есть число сочетаний без повторений из 25 по 5, то есть

$$C_{25}^5 = \frac{25!}{5!\cdot 20!} = 53130.$$

Итак, из группы в 25 человек можно выбрать баскетбольную команду 53 130 способами.

6. Определение. *Сочетанием с повторениями* из n элементов по k элементам называется множество **не**<u>упорядоченных</u> наборов, состоящих из k элементов, взятых из n элементов, причём в этих наборах элементы <u>могут повторяться</u>. Число таких наборов определяется по формуле:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k. \qquad (6)$$

Пример. В магазине имеется 15 сортов конфет. Некто покупает 10 конфет. Сколькими способами можно совершить покупку?

Решение. Имеем 15 множеств (сортов) конфет, из которых производится выбор 10 конфет. Конфеты в наборе могут повторяться (возможно, что все 10 конфет будут одного сорта), порядок конфет в наборе не имеет значения. Получаем

$$\overline{C}_{15}^{10} = C_{15+10-1}^{10} = C_{24}^{10} = \frac{24!}{10!\cdot 14!} = 1961256\,.$$

Итак, возможно 1961256 различных наборов конфет.

Очень часто бывает трудно определить, какая из шести комбинаций должна быть применена в каждом конкретном случае. Тогда можно воспользоваться следующей схемой:

1. Находим *основное множество*, из которого осуществляется выбор. Количество элементов этого множества есть n.

2. Если требуется:

✓ упорядочивать элементы *основного множества* местами, то имеем <u>перестановку</u> (при не повторении в полученном наборе элементов *основного множества* получаем <u>перестановку без повторений</u> (см. (3)), а при повторении – <u>перестановку с повторениями</u> (см. (4)));

✓ выбрать часть *основного множества*, то находим k – число элементов *множества выбора*.

3. Важен ли порядок элементов *множества выбора*?

✓ Если порядок важен, то имеем <u>размещения</u> (при не повторении элементов *основного множества* во *множестве выбора* – <u>без повторений</u> (см. (1)), а при повторении – <u>с повторениями</u> (см. (2))).

✓ Если порядок не важен, то имеем <u>сочетания</u> (при не повторении элементов *основного множества* во *множестве выбора* – <u>без повторений</u> (см. (5)), а при повторении – с<u> повторениями</u> (см. (6))).

Заметим, что иногда необходимо применять описанные выше правила *суммы* и *произведения*.

Пример. В кружке художественного слова занимается 15 человек, в фортепианном кружке – 10, в вокальном – 12 и в фотокружке – 20. Сколькими способами можно составить группу из 4 чтецов, 3 пианистов, 5 певцов и одного фотографа?

Решение. Разобьём задачу на подзадачи.

Сначала найдём, сколькими способами можно выбрать чтецов.

1. Производим выбор из 15 человек, то есть $n = 15$.
2. Выбираем четырёх человек, то есть $k = 4$.
3. Порядок людей в группе не важен, а значит, мы имеем дело с сочетанием. Так как люди выбираются разные, то это будут сочетания без повторений – C_{15}^4.

Проводя аналогичные рассуждения, выбираем:
пианистов: 3 из 10 – C_{10}^3 способами,
певцов: 5 из 12 – C_{12}^5 способами,
фотографа: 1 из 20 – C_{20}^1 способами.

Поскольку выбор производится по всем четырём позициям, а не по одной, применяем правило произведения. Итак, группу можно составить $N = C_{15}^4 \cdot C_{10}^3 \cdot C_{12}^5 \cdot C_{20}^1$=2,595·$10^9$ способами.

Определение. *Биномом Ньютона* называют разложение вида:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + b^n,$$

где $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^m$, $m < n$ – биномиальные коэффициенты (сочетания). Частным случаем бинома Ньютона при $n = 2$ и $n = 3$ являются известные формулы сокращённого умножения:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,\ (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Контрольные вопросы к § 7

1. Что является предметом комбинаторики?
2. Сформулируйте правила суммы и произведения.
3. Дайте определение размещений без повторений (с повторениями).
4. Дайте определение сочетаний без повторений (с повторениями).
5. Дайте определение перестановок без повторений (с повторениями).
6. Сформулируете схему решения задач комбинаторики.

Задачи

1. Сколькими способами можно выбрать один цветок из корзины, в которой имеется 10 тюльпанов, 8 роз и 5 гладиолусов?

2. Из 6 первокурсников, 5 второкурсников и 7 третьекурсников надо выбрать 3 студентов на конференцию. Сколькими способами можно это сделать, если выбранные студенты должны быть с разных курсов?

3. Из 8 мальчиков и 10 девочек класса для участия в эстафете надо составить 3 команды, каждая из которых состоит из мальчика и девочки. Сколькими способами это можно сделать?

4. Сколько различных «слов» из трёх букв можно составить из букв слова ЗАЧЁТ?

5. Сколькими способами можно выбрать 3 различных пирожка из 8 видов, имеющихся в буфете?

6. Сколько различных пятибуквенных «слов» можно составить из букв слова ВОЛГА. Сколько среди них таких, которые начинаются буквой В и заканчиваются буквой А?

7. Студенты 1 курса изучают 12 дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание на среду, если в этот день должно быть 5 различных предметов?

8. Сколькими способами можно расставить 6 различных книг на полке, чтобы определённые 3 книги стояли рядом?

9. Сколькими способами 3 награды могут быть распределены между 7 участниками олимпиады?

10. В корзине лежит 8 морковок, 6 картошек, 5 огурцов. Сколькими способами можно выбрать 4 овоща из корзины? Сколькими способами можно выбрать 1 морковку и 2 картошки?

11. Сколько различных трёхзначных чисел (цифры не повторяются) можно составить из цифр числа 4689?

12. Из цифр 1, 5, 7, 8 составлены различные трёхзначные числа. Сколько из них чётных?

13. Сколько перестановок можно составить из букв слова ОСИНА, в которых буква И стоит на третьем месте?

14. У одного студента имеется 5 различных карандашей, а у другого – 8. Сколькими способами они могут осуществить обмен: карандаш на карандаш? два карандаша на два карандаша?

15. В урне имеется 10 белых и 7 чёрных шаров. Сколькими способами можно выбрать 4 шара, чтобы среди них был 1 белый и 3 чёрных шара?

16. Из группы, состоящей из 7 юношей и 5 девушек, надо выбрать 4 человек так, чтобы среди них было не менее двух юношей. Сколькими способами это можно сделать?

17. В магазине имеется 6 сортов конфет. Сколько различных покупок, содержащих не более четырёх сортов конфет, можно сделать в этом магазине?

18. Решить уравнения:

а) $\dfrac{A_x^4 P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$; б) $3C_{x+1}^4 = 14C_{x-1}^4$; в) $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$;

г) $\dfrac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$; д) $\dfrac{A_{x+1}^{n+1} \cdot P_{x-n}}{P_{x-2}} = 90$.

19. Записать разложения биномов Ньютона:

а) $(a-x)^4$; б) $(2+b)^5$; в) $(x+1)^5$;

г) $(x-1)^6$; д) $(x-2y)^4$.

Домашнее задание

20. В пенале первоклассника лежит 2 простых и 6 цветных карандаша. Сколькими способами первоклассник может выбрать карандаш для рисования?

21. Имеется 6 видов конвертов и 3 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для отправки письма?

22. В студенческой группе учится 9 парней и 7 девушек. Сколькими способами можно выбрать из группы двух студентов одного пола?

23. Сколько пятибуквенных «слов» можно составить из букв слова АЙБОЛИТ? Сколько среди них таких, которые начинаются буквой А и заканчиваются буквой Т?

24. Сколькими способами можно выбрать 2 разных учебника из 6, имеющихся в библиотеке?

25. Сколько различных «слов» из 9 букв можно составить из букв слова ЧЕБОКСАРЫ?

26. Сколькими способами можно составить набор из 8 карт из колоды в 36 карт так, чтобы в него вошли 3 короля, 1 восьмёрка и 4 валета?

27. Сколько можно составить шестизначных телефонных номеров из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы в каждом отдельно взятом номере все цифры были различны?

28. Из цифр 2, 4, 6, 8, 9 составлены различные трёхзначные числа. Сколько из них нечётных?

29. Решить уравнения:

а) $A_{x+1}^2 = 30$; б) $C_x^3 = \dfrac{5x(x-3)}{4}$; в) $C_{x+1}^5 = \dfrac{3A_x^3}{8}$.

Дополнительные задачи

30. Из 5 чашек, 6 блюдец и 7 чайных ложек хотят накрыть стол для трёх человек, дав каждому из них одну чашку, одно блюдце и одну ложку. Сколькими способами можно это сделать?

31. Сколькими способами из группы в 24 человека можно выбрать двоих делегатов на конференцию?

32. Сколько существует пятизначных телефонных номеров с пятью различными цифрами?

33. Сколькими способами 10 человек могут встать в очередь друг за другом?

34. Сколькими способами можно составить трёхцветный полосатый флаг, если имеются ткани 6 цветов?

35. Сколькими способами из группы спортсменов в 18 человек можно выбрать двоих участников соревнования?

36. Сколькими способами можно выбрать: а) по 2 карты; б) по 32 карты из колоды, содержащей 36 игральных карт?

37. Сколькими способами можно составить дозор из трёх солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

38. На собрании должно выступить 5 человек: А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно расположить их в списке выступающих? Сколько существует способов выступления, при которых Б выступает после А?

39. Найти число способов извлечения из 36 игральных карт двух тузов и двух королей?

40. Два букиниста обмениваются друг с другом парами книг. Найти число способов обмена, если первый букинист обменивает 6 книг, а второй – 8 книг.

41. Вычислить:

а) $\dfrac{P_8}{A_8^7}$; б) $\dfrac{A_7^4 - P_5}{A_5^2}$; в) $\dfrac{2P_3 + 3A_4^2}{5P_5 - P_3}$; г) $\dfrac{P_8 P_7}{7P_7}$.

42. Проверить равенства:

а) $C_{10}^5 = \dfrac{A_{15}^5}{P_5}$; б) $C_6^2 = \dfrac{A_m^{m-8}}{P_{m-8}}$.

43. Решить уравнения:

а) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$; б) $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$;

в) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$.

44. Найти:

а) четвёртый член разложения $(a+3)^7$;

б) восьмой член разложения $(a^2 + b^3)^{13}$;

в) средний член разложения $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^8$.

45. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе могут повторяться?

46. Фотограф выстраивает в ряд трёх мужчин и четырёх женщин так, чтобы мужчины и женщины чередовались. Сколькими способами он может это сделать?

47. Студент сдаёт в сессию 3 экзамена. Сколько существует различных комбинаций оценок, которые он может получить?

48. Сколькими способами можно купить набор из трёх пирожных, если в продаже имеются 4 сорта пирожных и пирожные в наборе могут повторяться?

49. Сколько шестибуквенных «слов» можно составить из букв слова АНАНАС?

50. Сколько различных вариантов распределения оценок за контрольную работу может быть для трёх студентов, если возможны оценки: 2, 3, 4, 5?

51. Сколькими способами можно выбрать тройку, семёрку, туза из колоды в 52 карты?

52. Сколько шестибуквенных «слов» можно составить из букв слова МОЛОКО?

§ 8. Вероятность события

1. События и их классификация.
2. Понятие вероятности события.

1. События и их классификация

Определение. Опыт, эксперимент или наблюдение явлений называется *испытанием*.

Определение. Результат (исход) испытания называется *событием*.

Обозначение событий: A, B, C, …

Примеры. При броске монеты (это испытание) событиями являются выпадение орла или решки. При выстреле по мишени (это испытание) событиями являются попадание в цель или промах.

Определение. *Достоверным* называется событие, которое обязательно произойдёт в результате данного опыта.

Определение. *Невозможным* называется событие, которое заведомо не произойдёт в результате данного опыта.

Определение. *Случайным* называется событие, которое может либо произойти, либо не произойти в результате данного опыта.

Пример. Испытание – извлечение шара из урны, в которой все шары белые.

Тогда событие A – вынут белый шар – достоверное событие;

событие B – вынут чёрный шар – невозможное событие.

Пример. Испытание – подбрасывание игрального кубика. Событие A – выпадение 2 очков – случайное событие.

Теория вероятностей – это раздел математики, в котором изучаются закономерности в случайных событиях.

Определение. События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании, то есть они не могут произойти вместе в одном опыте.

Определение. События называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появления других в одном и том же испытании.

Определение. События называются *равновозможными*, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое, то есть все события имеют равные «шансы».

Определение. События называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит.

Обозначение противоположных событий: A и $\overline{A}$.

Пример. Испытание – подбрасывание игрального кубика. Рассмотрим события:

A – выпадение 4 очков, B – выпадение чётного числа очков,

C – выпадение 5 очков, D – выпадение нечётного числа очков.

Несовместными являются пары событий (A, C), (A, D), (B, C), (B, D).

Совместными являются пары событий (A, B), (C, D).

Равновозможными являются пары событий (A, C), (B, D).

Противоположными являются события B и D.

Определение. События называются *попарно несовместными*, если любые два из них несовместны.

Определение. Говорят, что совокупность событий образует *полную группу* событий, если они попарно-несовместны и в результате испытания происходит только одно из них.

Примеры полных групп.

1) Испытание – подбрасывание игрального кубика. События A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 – выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков соответственно. Тогда $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ – полная группа событий.

2) Испытание – подбрасывание монеты, тогда {орёл, решка} – полная группа событий.

3) Испытание – выстрел, тогда {попадание, промах} – полная группа событий.

Определение. *Суммой* двух событий A и B называется событие $A+B$, состоящее в наступлении **или** события A, **или** события B, **или** обоих этих событий.

Определение. *Произведением* двух событий A и B называется событие $A \cdot B$, состоящее в наступлении обоих событий **и** A, **и** B.

Пример. Испытание – выстрел двух стрелков. Событие A – в мишень попал 1-й стрелок, B – в мишень попал 2-й стрелок. Тогда событие $A+B$ – в мишень попал хотя бы один стрелок; событие $A \cdot B$ – в мишень попали оба стрелка.

2. Понятие вероятности события

Пусть в n повторяющихся опытах некоторое событие A наступило m раз.

Определение. *Абсолютной частотой* события A называется количество опытов, в которых появилось событие A, то есть m.

Определение. *Относительной частотой* события A называется отношение числа опытов, в которых появилось событие A, к числу всех произведённых опытов:

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример. Из 31 дня июля 10 дней были дождливыми. Найти абсолютную и относительную частоты ясных дней в июле.

Решение. Из условия задачи следует, что $n = 31$, $m = 31 - 10 = 21$. Тогда абсолютная частота ясных дней в июле равна $m = 21$, относительная частота равна $W(A) = \dfrac{21}{31}$.

Для математического изучения случайного события требуется какая-либо его количественная оценка. Такой оценкой является вероятность события, то есть число, выражающее степень возможности появления события в данном опыте. Приведём *классическое определение* вероятности события.

Определение. *Элементарным событием* называется каждый из возможных результатов испытания.

Определение. *Вероятностью* $P(A)$ события A называется отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу n всех элементарных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Предполагается, что все элементарные события образуют полную группу равновозможных событий.

Свойства вероятности события:

1) для любого события $0 \le P(A) \le 1$;
2) вероятность достоверного события $P(A_{дост.}) = 1$;
3) вероятность невозможного события $P(A_{невозм.}) = 0$.

Пример. В урне имеется 20 шаров: 15 белых и 5 чёрных. Какова вероятность вынуть чёрный шар, если вынимается один шар?

Решение. Пусть событие A – появление чёрного шара. Тогда $m = 5$ – количество чёрных шаров, $n = 20$ – количество всех шаров в урне. Тогда вероятность появления чёрного шара равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Пример. Найти вероятность события A – выпадение не более 5 очков при броске игрального кубика.

Решение. Рассмотрим полную группу равновозможных событий в данном испытании: $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$, где события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 – выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков соответственно. Таким образом, число всех исходов $n = 6$. Благоприятствующие событию A события – A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, то есть $m = 5$. Тогда $P(A) = \frac{5}{6}$.

Вычисление вероятности события часто облегчается, если использовать комбинаторные методы.

Пример. В корзине лежит 4 жёлтых, 3 красных и 2 зелёных яблока. Наудачу вынимают 2 яблока. Найти вероятность того, что

а) все яблоки одного цвета;

б) все яблоки разных цветов.

Решение. Число всех исходов – это число способов выбора любых 2 яблок из 9 имеющихся в корзине:

$$n = C_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9}{2} = 36.$$

а) Событие A – вынули 2 яблока одного цвета.

Данному событию благоприятствуют следующие события: оба яблока жёлтых, оба яблока красных, оба яблока зелёных, причём выбрать 2 жёлтых яблока из 4 можно $C_4^2 = 6$ способами, выбрать 2 красных яблока из 3 можно $C_3^2 = 3$ способами, выбрать 2 зелёных яблока из 2 можно $C_2^2 = 1$ способом.

По правилу суммы общее число благоприятствующих событий равно $m = C_4^2 + C_3^2 + C_2^2 = 6 + 3 + 1 = 10$.

Тогда искомая вероятность равна $P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

б) Событие B – вынули 2 яблока разных цветов.

Данному событию благоприятствуют следующие события:

1 жёлтое яблоко, 1 красное яблоко;

1 жёлтое яблоко, 1 зелёное яблоко;

1 зелёное яблоко, 1 красное яблоко.

Выбрать 1 жёлтое яблоко можно 4 способами, 1 красное – 3 способами, тогда пару яблок (жёлтое, красное) по правилу произведения можно выбрать $4\cdot 3 = 12$ способами. Аналогично, пару яблок (жёлтое, зелёное) по правилу произведения можно выбрать $4\cdot 2 = 8$ способами, а пару яблок (зелёное, красное) по правилу произведения можно выбрать $2\cdot 3 = 6$ способами.

По правилу суммы общее число благоприятствующих событий равно $m = 12 + 8 + 6 = 26$.

Тогда искомая вероятность равна $P(B)=\dfrac{26}{36}=\dfrac{13}{18}$.

Контрольные вопросы к § 8

1. Что называется испытанием?
2. Дайте определение события.
3. Какие события называются случайными, достоверными и невозможными?
4. Что является предметом теории вероятностей?
5. Какие события называются несовместными, совместными, равновозможными и противоположными?
6. Дайте определение полной группы событий.
7. Что называется суммой и произведением событий?
8. Дайте определения относительной частоты и абсолютной частоты события.
9. Дайте классическое определение вероятности события.

Задачи

1. Пусть A, B, C – три произвольных события. Выразить через них следующие события:

а) произошли все 3 события;

б) произошло только событие C;

в) произошло хотя бы одно из событий;

г) ни одного события не произошло;

д) произошли A и B, C не произошло.

2. Из 28 вопросов теста по математике студент ответил правильно на 21 вопрос. Найти абсолютную и относительную частоты неправильных ответов студента.

3. Сколько раз подбрасывали монету, если известно, что решка выпала 18 раз и относительная частота появления решки составила 0,6?

4. В магазин поступило 20 телевизоров, 8 из них имеют заводской дефект. Случайным образом выбирается один телевизор. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

5. В ящике имеется 5 пронумерованных шаров с номерами 1, 2, …, 5. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 5?

6. Найти вероятность выпадения чётной цифры при одном подбрасывании игрального кубика.

7. Найти вероятность того, что в наудачу написанном двузначном числе цифры одинаковые (различные).

8. Буквы «О», «П», «Л», «Ё», «Т» написаны на карточках. Найти вероятность того, что

а) получится слово ТОП, если наугад одна за другой выбираются три карточки;

б) получится слово ПОЛЁТ, если наугад одна за другой выбираются пять карточек.

9. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 6 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают 5 человек на предстоящую конференцию. Найти вероятность того, что будут отобраны только третьекурсники.

10. Из колоды в 36 карт вынимают 4 карты. Найти вероятность того, что будут вынуты 3 короля и семёрка.

11. Какова вероятность того, что из наудачу взятых 6 букв слова МАТЕМАТИК 4 буквы окажутся гласными?

12. В магазине имеется 12 тортов, причём 8 из них с масляным кремом. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу тортов окажутся 4 торта с масляным кремом.

13. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 7;

б) сумма выпавших очков равна 8, а разность равна 4;

в) сумма выпавших очков будет не менее 9;

г) сумма выпавших очков будет более 10.

Домашнее задание

14. Из 1000 заёмщиков кредитов банка не вернули кредит 180 клиентов. Найти относительную частоту не возврата кредитов в банке.

15. Монету подбросили 40 раз. Сколько раз выпала решка, если относительная частота появления решки составила 0,425?

16. Игральный кубик бросают один раз. Расположите события в порядке возрастания их вероятностей:

а) выпало число очков, меньшее 3;

б) выпало число очков, большее 3;

в) выпало число очков, равное 3;

г) выпало число очков, большее 6.

17. Из слова АБРИКОС выбирается наугад одна буква. Найти вероятность того, что эта буква гласная.

18. Набирая телефон, абонент забыл одну цифру и набрал её наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

19. В первом ящике находятся шары с номерами: 1, 2, 3, 4, во втором ящике – шары с номерами: 5, 6, 7, 8, 9. Из каждого ящика вынули по одному шару. Найти вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров:

а) не меньше 6; б) равна 10; в) не больше 12.

20. В ящике имеется 13 деталей, из них 9 окрашенных. Наудачу извлечены 4 детали. Найти вероятность того, что извлечённые детали окрашены.

21. В группе учится 18 студентов, среди которых 4 отличника. По списку наудачу отобрано 10 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов два отличника.

Дополнительные задачи

22. В ящике имеется 100 яиц, из них 5 некачественных. Наудачу вынимают одно яйцо. Найти вероятность того, что вынутое яйцо некачественное.

23. В урне находится 12 белых и 8 чёрных шаров. Найти вероятность того, что среди наугад вынутых 5 шаров 3 будут чёрными?

24. Из колоды в 36 карт вытягивают наудачу 5 карт. Какова вероятность того, что будут вытянуты 2 туза и 3 шестёрки?

25. Найти вероятность появления верхней грани с числом очков, кратным 3, при бросании игрального кубика.

26. Буквы, образующие слово АПЕЛЬСИН, написаны на карточках и тщательно перемешаны в урне. Извлекают наугад карточки одну за другой. Какова вероятность того, что извлечённые буквы образуют слово СПАНИЕЛЬ?

27. В классе 10 учащихся изучают английский язык, 6 – французский и 8 – немецкий. Наугад составляется группа из 3 человек. Найти вероятность события:

а) все 3 ученика изучают разные языки;

б) все 3 ученика изучают английский язык.

28. Участники жеребьёвки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлечённого жетона не содержит цифры 5.

29. В шахматном турнире принимает участие 20 шахматистов, среди которых 6 мастеров спорта. Случайным образом с помощью жеребьёвки они распределяются на 2 группы по 10 шахматистов в каждой.

а) Какова вероятность того, что все 6 мастеров спорта оказались в одной группе?

б) Какова вероятность того, что 2 мастера спорта попадут в одну группу, а 4 – в другую?

30. В опыте с бросанием двух монет найти вероятности событий:

а) выпал один орёл и одна решка;

б) выпало не менее одной решки.

31. Числа от 1 до 100 записывают на отдельных карточках, помещают их в воду и тщательно встряхивают. После этого извлекают одну карточку.

а) Каково множество равновозможных исходов этого опыта и чему равна вероятность каждого исхода?

б) Какова вероятность того, что написанное на карточке число делится на 3?

в) Какова вероятность того, что написанное на карточке число делится на 3 и на 5?

г) Какова вероятность того, что написанное на карточке число делится на 5, но не делится на 7?

§ 9. Основные теоремы и формулы теории вероятностей

1. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
2. Формула полной вероятности.
3. Формулы Байеса.
4. Формула Бернулли.

1. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Определение. События называются *независимыми*, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, произошли в ходе испытания другие события или нет. В противном случае события называются *зависимыми*.

Определение. *Условной вероятностью* $P_A(B)$ события B называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Замечание. Если события *независимые*, то $P_A(B) = P(B)$.

Пример. В урне имеется 3 белых и 3 чёрных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечён чёрный шар.

Решение. Событие A – появление чёрного шара при первом испытании, B – появление белого шара при втором.

Так как шары обратно не возвращаются, то данные события являются зависимыми. Следовательно, надо найти условную вероятность события B.

После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых, то есть $P_A(B) = \dfrac{n(B)}{n} = \dfrac{3}{5}$.

Теорема 1. *Если события A и B несовместные, то*

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Следствия.

1) Для попарно несовместных событий $A_1,\ A_2, \ldots\ A_n$ справедливо

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

2) Сумма вероятностей событий $A_1,\ A_2, \ldots\ A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

3) Сумма вероятностей противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Теорема 2. *Если события A и B зависимые, то*

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Следствие. Для зависимых событий $A_1,\ A_2, \ldots\ A_n$ справедливо

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n).$$

Теорема 3. *Если события A и B независимые, то*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Следствие. Для независимых событий $A_1,\ A_2, \ldots\ A_n$ справедливо

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Теорема 4. *Если события A и B совместные, то*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Следствие. Для трёх совместных событий *A*, *B*, *C* справедливо

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$-P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Замечание. Однако, проще найти вероятность суммы нескольких совместных событий, используя равенство $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, где событие *A* есть сумма совместных событий $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, а событие $\overline{A}$ имеет вид $\overline{A} = \overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n$.

Пример 1. В урне имеется 10 красных, 7 синих, 13 белых шаров. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление или красного, или синего шара.

Пусть событие *A* – появление красного шара, *B* – появление синего шара. Тогда искомое событие – это сумма *A*+*B* – появление цветного шара.

Так как события *A* и *B* несовместные (появление красного шара исключает появление синего шара и наоборот), то по теореме 1 получим искомую вероятность:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{10}{30} + \frac{7}{30} = \frac{17}{30}.$$

Пример 2. В урне имеется 5 белых, 4 чёрных и 3 синих шара. Наудачу извлекают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором – чёрный шар, при третьем – синий шар.

Решение. Рассмотрим события:

A – появление белого шара при первом испытании,

B – появление чёрного шара при втором испытании,

C – появление синего шара при третьем испытании.

Тогда событие *ABC* – искомое событие – появление всех трёх событий *A*, *B*, *C*. Так как шары не возвращаются обратно, то события *A*, *B*, *C* являются зависимыми, то есть согласно теореме 2 имеем

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{22}.$$

Пример 3. Найти вероятность одновременного выпадения 6 очков при одном броске двух игральных кубиков.

Решение. Событие A – появление 6 очков на 1-м кубике, событие B – появление 6 очков на 2-м кубике, причём оба события независимые. Тогда по теореме 3 имеем

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}.$$

Пример 4. Найти вероятность того, что из колоды в 36 карт была вынута семёрка или буби.

Решение. Событие A – вынули семёрку, событие B – вынули буби. Тогда событие $A+B$ – вынули семёрку или буби. Так как события A, B совместные (событие AB – карта семёрка буби), то согласно теореме 4 имеем

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{4}{36}+\frac{9}{36}-\frac{1}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}.$$

2. Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из попарно несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу событий. События $B_1, B_2, ..., B_n$ называются *гипотезами* для события A. Тогда имеет место **формула полной вероятности**:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A).$$

Пример. На зачёте предлагается 50 задач, из них 12 – по множествам, 15 – по математической логике, остальные – по теории вероятностей. Для сдачи зачёта студент должен решить первую попавшуюся наугад задачу. Какова вероятность для студента сдать зачёт, если он умеет решать 10 задач по множествам, 8 – по математической логике и 20 – по теории вероятностей?

Решение. Событие A – задача решена (зачёт сдан).

Рассмотрим гипотезы B_1 – попадётся задача по множествам, B_2 – попадётся задача по математической логике, B_3 – попадётся задача по теории вероятностей.

Тогда по формуле полной вероятности имеем

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)=$$

$$=\frac{12}{50}\cdot\frac{10}{12}+\frac{15}{50}\cdot\frac{8}{15}+\frac{23}{50}\cdot\frac{20}{23}=\frac{38}{50}=\frac{19}{25}.$$

3. Формулы Байеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из попарно несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$ (гипотезы), которые образуют полную группу событий. Пусть произведено одно испытание, в результате которого произошло событие A. Тогда условные вероятности гипотез $B_1, B_2, ..., B_n$ вычисляются по **формулам Байеса**

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}.$$

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез $B_1, B_2, ..., B_n$ после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.

Пример. Проверка заданий ЕГЭ группы C осуществляется доктором наук и аспирантом. Вероятность того, что работу проверит доктор наук, равна 0,63. Вероятность того, что правильно решённая задача будет положительно оценена доктором наук, равна 0,93, аспирантом – 0,88. Правильно решённая задача была положительно оценена. Какова вероятность того, что данная работа была проверена доктором наук?

Решение. Событие A – правильно решённая задача была положительно оценена.

Рассмотрим гипотезы: B_1 – работу проверил доктор наук, B_2 – работу проверил аспирант, причём

$$P(B_1)=0,63,\ P(B_2)=1-P(B_1)=0,37.$$

Тогда искомая вероятность вычисляется по формуле Байеса:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}=$$

$$=\frac{0,63\cdot 0,93}{0,63\cdot 0,93+0,37\cdot 0,88}\approx 0,64.$$

Как видно, до испытания вероятность события B_1 равнялась 0,63, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этого события (точнее, условная вероятность) изменилась и стала равна 0,64. Таким образом, использование формулы Байеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

4. Формула Бернулли

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A наступит ровно k раз в n независимых испытаниях, равна

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$.

Пример. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что
а) орёл выпадет менее двух раз;
б) орёл выпадет не менее двух раз.

Решение. Испытание – это бросок монеты 6 раз, $n = 6$.

Событие A – выпадение орла при одном броске монеты, $p = 0{,}5$, $q = 1 - p = 0{,}5$.

а) Рассмотрим события A_1 – орёл не выпадет ни разу, A_2 – орёл выпадет 1 раз.

Тогда $A_1 + A_2$ – орёл выпадет менее двух раз – искомое событие. Так как события A_1 и A_2 несовместные, то в силу теоремы 1 имеем

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Для события A_1 – орёл не выпадет ни разу – получим $k = 0$, тогда по формуле Бернулли имеем

$$P(A_1) = P_6(0) = \frac{6!}{0!(6-0)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}.$$

Для события A_2 – орёл выпадет 1 раз – получим $k = 1$, тогда по формуле Бернулли имеем

$$P(A_2) = P_6(1) = \frac{6!}{1!(6-1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6}{64}.$$

Тогда соберём искомую вероятность:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{64} + \frac{6}{64} = \frac{7}{64}.$$

б) Событие «Орёл выпадет не менее двух раз» является противоположным событию $A_1 + A_2$. Таким образом, надо найти вероятность события $\overline{A_1 + A_2}$.

Согласно следствию 3 теоремы 1, получим

$$P(\overline{A_1 + A_2}) = 1 - P(A_1 + A_2) = 1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64}.$$

Контрольные вопросы к § 9

1. Какие события называются зависимыми (независимыми)?
2. Дайте определение условной вероятности.
3. Сформулируйте теоремы о сумме несовместных (совместных) событий.
4. Сформулируйте теоремы о произведении независимых (зависимых) событий.
5. Запишите формулу полной вероятности.
6. Запишите формулы Байеса.
7. Запишите формулу Бернулли.

Задачи

1. Указать, какие из приведённых событий являются несовместными:

а) A – выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени, B – выбивание чётного числа очков при стрельбе по мишени;

б) A – появление 6 очков при бросании игральной кости, B – появление 4 очков при бросании игральной кости;

в) A – наступление ночи, B – восход солнца;

г) A – выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени», B – выбивание от 7 до 10 очков при стрельбе по мишени.

2. Случайные события A и B, удовлетворяющие условиям $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$, $P(AB) = 0,2$, являются:

а) совместными и независимыми;

б) совместными и зависимыми;

в) несовместными и независимыми;

г) несовместными и зависимыми?

3. В урне имеется 6 белых, 10 чёрных, 8 синих и 15 красных шаров. Вынули один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар белый? чёрный? синий? красный? белый или красный? белый, чёрный или синий?

4. В ящике находится 20 деталей, из них 12 окрашенных. Наудачу извлечены 3 детали. Найти вероятность того, что извлечённые детали окрашены.

5. Из колоды в 36 карт вынимают по одной карте, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что извлекут в третий раз короля, если в первый раз была вынута девятка, во второй раз был вынут король.

6. Игральный кубик бросают три раза. Найти вероятность того, что на верхней грани кубика выпадет три раза число очков, не меньшее 3.

7. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что выпадет хотя бы одна пятёрка.

8. Бросают монету и игральный кубик. Найти вероятность одновременного появления орла и 4 очков.

9. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти вероятность того, что

а) все три стрелка попадут в цель;

б) хотя бы один стрелок попадёт в цель.

10. В коробке лежит 8 карандашей, из них 3 простых. Наудачу извлечены 2 карандаша. Найти вероятность того, что

а) один карандаш простой;

б) два карандаша простых;

в) хотя бы один карандаш простой.

11. На полке стоит 10 книг, из них 6 в переплёте. Наудачу взяли 3 книги. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых книг окажется в переплёте.

12. В порт приходят корабли только из трёх пунктов отправления. Вероятность появления корабля из первого пункта равна 0,1, из второго – 0,7. Найти вероятность прибытия корабля из третьего пункта.

13. Событие A может наступить лишь при условии появления одного из двух несовместных событий B_1 и B_2, образующих полную группу событий. Известны вероятность $P(B_1)=\dfrac{1}{3}$ и условные вероятности $P_{B_1}(A)=\dfrac{1}{2}$ и $P_{B_2}(A)=\dfrac{1}{4}$. Найти вероятность события A.

14. Имеется три урны. В первой урне лежит 3 белых и 2 чёрных шара, во второй – 2 белых и 3 чёрных шара, в третьей – 5 белых шаров. Наугад выбирается урна и из неё извлекается один шар. Найти вероятность того, что вынут белый шар.

15. Из 30 билетов студент выучил только 25. Каким выгоднее ему зайти на экзамен, первым или вторым?

16. В группе спортсменов лыжников в 2 раза больше, чем бегунов, а бегунов в 3 раза больше, чем велосипедистов. Вероятность выполнить норму для лыжника составляет 0,9, для бегуна – 0,75, для велосипедиста – 0,8. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнит норму.

17. В трёх ящиках содержатся, соответственно, две золотые, одна золотая и одна серебряная и две серебряные монеты. Случайным образом выбирается ящик и из него произвольно вынимается монета. Монета оказалась золотой. Какова вероятность того, что вторая монета в этом ящике также золотая?

18. В тире имеется 10 винтовок, из которых 3 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,9; для винтовки без оптического прицела – 0,7. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

19. Монету подбрасывают 8 раз. Найти вероятность того, что

а) решка выпадет 4 раза;

б) решка не выпадет ни разу;

в) решка выпадет хотя бы один раз.

Домашнее задание

20. Из колоды в 36 карт вынимают по одной карте, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что извлекут во второй раз туз, если в первый раз была вынута шестёрка.

21. По мишени производится 4 выстрела. Значение вероятности промаха при первом выстреле равно 0,5, при втором – 0,3, при третьем – 0,2, при четвертом – 0,1. Найти вероятность того, что мишень не будет поражена ни разу.

22. Найти вероятность того, что из колоды в 36 карт был вынут король или крести.

23. Найти вероятность того, что из колоды в 36 карт был вынут король или валет.

24. Вероятность того, что день будет дождливым равна 0,8. Найти вероятность того, что день будет ясным.

25. В первом ящике имеется 7 красных и 9 синих шаров, во втором – 4 красных и 11 синих. Из произвольного ящика достают шар. Найти вероятность того, что он красный.

26. В двух пакетах имеется по 20 конфет одинаковой формы: в первом пакете 5 конфет с начинкой, а во втором – 8. Наугад выбранная конфета оказалась с начинкой. Найти вероятность того, что она была вынута из второго пакета.

27. В семье четверо детей. Известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,52. Какова вероятность того, что

а) все они девочки; б) среди них есть три девочки.

Дополнительные задачи

28. В ящике есть 9 белых, 6 чёрных и 5 зелёных шаров. Наудачу вынимают один шар. Найти вероятность того, что он окажется либо чёрным, либо зелёным.

29. Три орудия стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель каждого равна 0,7. Найти вероятность попадания в цель:

а) только одного из орудий; б) хотя бы одного орудия.

30. В каждом из трёх ящиков имеется по 24 детали; при этом в первом ящике 18, во втором 20, в третьем 22 стандартные детали. Из каждого ящика берут по одной детали. Найти вероятность того, что все три извлечённые детали окажутся стандартными.

31. В коробке лежит 5 синих, 4 красных и 3 зелёных карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что

а) все они одного цвета;

б) все они разных цветов;

в) среди них 2 синих и 1 зелёный карандаш?

32. Найти вероятность поражения цели при совместной стрельбе тремя орудиями, если вероятности поражения цели орудиями равны 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно.

§ 10. Случайные величины. Числовые характеристики дискретных случайных величин

1. Понятие случайной величины.
2. Закон распределения дискретной случайной величины.
3. Функция распределения случайной величины.
4. Математическое ожидание дискретной случайной величины.
5. Дисперсия дискретной случайной величины.
6. Среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины.

1. Понятие случайной величины

Определение. *Случайной величиной* называют переменную величину, которая в зависимости от исхода испытания случайно принимает одно значение из множества возможных значений.

Обозначение случайных величин: X, Y, Z, ... ; возможных значений соответствующих случайных величин: x, y, z, …

Пример 1.

1) При однократном бросании игральной кости число выпавших очков – это случайная величина, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2) Число родившихся мальчиков среди 3 новорождённых – это случайная величина, которая может принять одно из значений: 0, 1, 2, 3.

Определение. *Дискретной случайной величиной* называют случайную величину, принимающую различные отдельные изолированные друг от друга значения с определёнными вероятностями.

Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным.

Случайные величины из примера 1 – дискретные.

Определение. *Непрерывной случайной величиной* называют случайную величину, которая может принимать любые значения из некоторого числового промежутка.

Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Примером непрерывной случайной величины является прирост веса домашнего животного за месяц, рост человека, температура воздуха.

Определение. *Законом распределения случайной величины* называют любое правило (таблица, функция, график), указывающее вероятности отдельных значений случайной величины или множества этих значений.

2. Закон распределения дискретной случайной величины

Будем рассматривать дискретные случайные величины, множество допустимых значений которых конечно.

Закон распределения дискретной случайной величины удобно задавать в виде таблицы, в которой первая строка содержит возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ величины X (обычно в порядке возрастания), а вторая строка – их вероятности $p_1, p_2, ..., p_n$.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Так как в результате испытания величина X всегда примет одно значение из множества возможных значений $x_1, x_2, ..., x_n$, то сумма всех вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Закон распределения дискретной случайной величины можно задавать графически. Для этого на оси Оx откладывают возможные значения x_i случайной величины X, а на оси Оy – их вероятности p_i.

Определение. *Многоугольником* (*полигоном*) *распределения* дискретной случайной величины X называют ломаную, соединяющую последовательно точки (x_1, p_1), (x_2, p_2), …, (x_n, p_n).

Пример 2. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается 2 выигрыша по 50 рублей и 30 выигрышей – по 1 рублю. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Построить многоугольник распределения.

Решение. Случайная величина X может принять следующие значения (выигрыш в рублях): $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 50$, причём $p_2 = \dfrac{30}{100} = 0{,}3$, $p_3 = \dfrac{2}{100} = 0{,}02$.

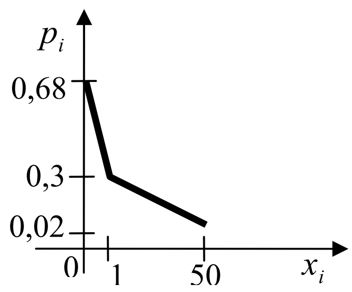
Из равенства $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ можно найти p_1: $p_1 = 1 - p_2 - p_3 = 0,68$.

Запишем закон распределения:

X	0	1	50
p	0,68	0,3	0,02

Проверка: $0,02 + 0,3 + 0,68 = 1$.

Построим многоугольник распределения:



3. Функция распределения случайной величины

Для непрерывной случайной величины в отличие от дискретной случайной величины нельзя построить таблицу распределения вероятностей.

Универсальным способом задания закона распределения вероятностей и непрерывной случайной величины, и дискретной случайной величины является функция распределения случайной величины.

Определение. *Функцией распределения* случайной величины X, или *интегральной функцией распределения*, называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что величина X приняла значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения.

1. $0 \le F(x) \le 1$ (так как $F(x)$ – это вероятность).

2. $F(x)$ – неубывающая функция:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) \le F(x_2).$$

3. Вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал $[a;b)$ равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах указанного полуинтервала:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет какое-либо заранее заданное значение, равна 0:

$$P(X = x_1) = 0.$$

5. Вероятности попадания непрерывной случайной величины X в интервал, отрезок или полуинтервал с одними и теми же концами одинаковы:

$$P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b).$$

6. Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то при $x \le a$ $F(x) = 0$, при $x \ge b$ $F(x) = 1$.

7. Для непрерывной случайной величины с возможными значениями на всей числовой оси справедливы равенства $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Определение. Случайная величина называется *непрерывной*, если её функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, может быть, отдельных точек.

Функция распределения дискретной случайной величины имеет вид $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$. Здесь суммирование ведётся по всем i, для которых $x_i < x$.

Функция распределения дискретной случайной величины является функцией с разрывами. Её график имеет ступенчатый вид.

Пример 3. По условию примера 2 найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

Решение. X – стоимость выигрыша для владельца одного лотерейного билета – дискретная случайная величина.

Закон распределения известен:

X	0	1	50
p	0,68	0,3	0,02

Будем задавать различные значения x и находить для них $F(x) = P(X < x)$.

Если $x \le 0$, то $F(x) = 0$ (по свойству 6).

Если $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0{,}68$.

Если $1 < x \le 50$, то $F(x) = P(X < 50)$. Здесь событие $X < 50$ состоит в том, что произойдёт либо событие $X = 1$, либо событие

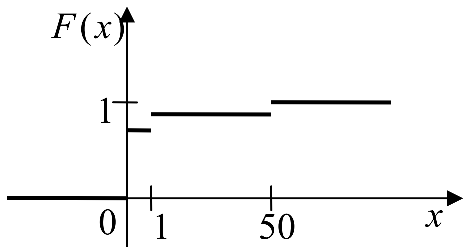
$X = 0$, которые несовместны. Следовательно, по теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем
$F(x) = P(X < 50) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,68 + 0,3 = 0,98$.

Если $x > 50$, то $F(x) = 1$ (по свойству 6).

Итак, запишем функцию распределения $F(x)$ аналитически:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 0,68 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0,98 & \text{при} \quad 1 < x \le 50, \\ 1 & \text{при} \quad x > 50. \end{cases}$$

График функции распределения $F(x)$:



Пример 4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ x/4 - 0,5 & \text{при} \quad 2 < x \le 6, \\ 1 & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключённое в интервале (2;4).

Решение. Функция распределения случайной величины X является непрерывной функцией, следовательно, X – непрерывная случайная величина. Тогда в силу свойств 5 и 3 имеем

$$P(2 < X < 4) \overset{св.5}{=} P(2 \le X < 4) \overset{св.3}{=} F(4) - F(2) = \left(\frac{4}{4} - \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{2}.$$

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако при решении многих задач достаточно знать лишь некоторые числовые характеристики случайной величины, которые описывают отдельные существенные свойства закона распределения случайной величины.

Пусть дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

4. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Определение. *Математическим ожиданием* $M(X)$ дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n.$$

Замечания.

1. Математическое ожидание дискретной случайной величины является неслучайной (постоянной) величиной.

2. Математическое ожидание $M(X)$ является средним значением дискретной случайной величины X (центром распределения).

3. Математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события.

Пример. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	–1	5
p	0,4	0,6

Решение.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{2}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2=-1\cdot 0{,}4+5\cdot 0{,}6=-0{,}4+3=2{,}6.$$

<u>Свойства математического ожидания дискретной случайной величины</u>.

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C)=C,\ C=const.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = C \cdot M(X),\ C = const.$$

3. Если X, Y независимые случайные величины, то

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y);$$

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

5. Дисперсия дискретной случайной величины

Пусть X – случайная величина, $M(X)$ – её математическое ожидание.

Определение. Разность $X - M(X)$ называют *отклонением* случайной величины X от её математического ожидания $M(X)$.

Определение. *Дисперсией* (рассеянием) $D(X)$ дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i =$$

$$= (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + \ldots + (x_n - M(X))^2 p_n.$$

Дисперсия характеризует разброс (рассеивание) значений случайной величины относительно её математического ожидания.

<u>Свойства дисперсии дискретной случайной величины.</u>

1. $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

2. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0,\ C = const.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X),\ C = const.$$

4. Если X, Y независимые случайные величины, то

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y);$$

$$D(XY) = M(X^2) \cdot M(Y^2) - (M(X))^2 \cdot (M(Y))^2.$$

Пример. Найти дисперсию дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	1	2	3
p	0,2	0,3	0,5

Решение. Вычислим дисперсию по свойству 1:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Найдём математическое ожидание величины X:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,5 =$$

$$= 0,2 + 0,6 + 1,5 = 2,3.$$

Запишем закон распределения квадрата случайной величины X:

X^2	1	4	9
p	0,2	0,3	0,5

Математическое ожидание квадрата случайной величины X равно:

$$M(X^2) = 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,5 = 0,2 + 1,2 + 4,5 = 5,9.$$

Тогда получим

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 5,9 - 2,3^2 = 5,9 - 5,29 = 0,61.$$

6. Среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины X, что в сравнительных целях неудобно. Когда желательно, чтобы оценка разброса имела размерность случайной величины X, используют другую числовую характеристику – среднее квадратическое отклонение.

Определение. *Средним квадратическим отклонением* дискретной случайной величины X называют квадратный корень из её дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения (см. предыдущий пример):

X	1	2	3
p	0,2	0,3	0,5

Решение. Так как $D(X) = 0,61$, то

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,61} \approx 0,78.$

Контрольные вопросы к § 10

1. Что называется случайной величиной?
2. Какая случайная величина называется дискретной (непрерывной)?
3. Дайте определение закона распределения случайной величины.
4. Что называется многоугольником распределения дискретной случайной величины?
5. Дайте определение функции распределения случайной величины.
6. Сформулируйте свойства функции распределения.
7. Дайте определение непрерывной случайной величины.
8. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?
9. Дайте определение дисперсии дискретной случайной величины.
10. Что называется средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины?

Задачи

1. Определить, закон распределения какой из дискретных случайных величин X или Y верен.

X	–1	0	1	4
p	0,6	0,2	0,1	0,1

Y	–2	1	3
p	0,5	0,4	0,6

2. Найти k , при котором закон распределения дискретной случайной величины X задаётся таблицей:

X	1	4	5	7
p	0,2	0,1	k	0,4

3. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб., 10 выигрышей по 20 руб., 20 выигрышей по 5 руб. Найти закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета. Построить многоугольник распределения. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

4. В партии имеется 15 рубашек, из них 5 имеют скрытый дефект. Покупают 3 рубашки. Найти закон распределения случайной величины X – числа дефектных рубашек среди купленных.

5. В урне имеется 7 белых и 3 чёрных шара. Из урны извлекают шар 2 раза подряд, причём каждый раз вынутый шар возвращается в урну и шары перемешиваются. Найти закон распределения случайной величины X – числа извлечённых белых шаров.

6. Найти числовые характеристики (математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$) дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	–1	4
p	0,2	0,8

7. Для дискретной случайной величины X известно $M(X)=4$, $M(X^2)=25$. Найти её среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

8. В урне имеется 5 шаров с номерами от 1 до 5. Вынули 2 шара. Случайная величина X – сумма номеров шаров. Найти закон распределения и числовые характеристики величины X.

9. Независимые дискретные случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	–2	–1	1
p	0,1	0,8	0,1

Y	0	1	2
p	0,5	0,4	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин X, Y, XY, $Z=2X-3Y+4$.

Домашнее задание

10. Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,8. Пусть случайная величина X – число попаданий в мишень. Найти закон распределения величины X.

11. Из партии в 12 изделий, среди которых имеется 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Пусть X – число бракованных изделий среди отобранных. Найти закон распределения, функцию распределения $F(X)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ величины X. Построить многоугольник распределения и функцию распределения $F(X)$.

12. Независимые дискретные случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	1	2	3
p	0,6	0,2	0,2

Y	–1	1	3
p	0,1	0,8	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин X, Y, $XY+1$, $Z=-3X+Y$.

Дополнительные задачи

13. В урне имеется 8 шаров, из которых 5 белых, остальные – чёрные. Вынимают наудачу 3 шара. Найти закон распределения числа вынутых белых шаров.

14. Три стрелка, ведущие огонь по цели, сделали по одному выстрелу. Вероятности их попадания в цель соответственно равны 0,5, 0,6 и 0,8. Построить закон распределения случайной величины X – числа попаданий в цель.

15. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	–2	1	2	3
p	0,08	0,40	0,32	0,2

Найти функцию распределения $F(x)$, построить её график.

Найти вероятности:

а) $P(X<2)$; б) $P(1\le X<3)$; в) $P(1<X\le 3)$.

16. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1,1	1,4	1,7	2,0	2,3
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Построить многоугольник распределения, график функции распределения $F(x)$. Найти вероятности:

а) $P(X > 1{,}4)$; б) $P(1{,}4 \le X \le 2{,}3)$.

17. В лотерее имеется 1000 билетов, их них выигрышных: 10 по 500 руб., 50 по 50 руб., 100 по 10 руб., 150 по 1 руб. Найти математическое ожидание выигрыша одного билета.

18. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения:

X	–1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины *X*.

19. Найти дисперсию по данному закону распределения дискретной случайной величины *X*:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025

20. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины *X* соответственно равны $\frac{7}{2}$ и $\frac{35}{12}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $4X - 1$.

21. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения:

X	–2	–1	0	1	2	3
p	0,1	0,2	0,25	0,15	0,1	0,2

Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин $X, -2X, X^2$.

22. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения:

X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Построить:

а) закон распределения случайной величины $Y = \sin(X - \frac{\pi}{4})$;

б) график функции распределения случайной величины Y.

23. Найти c, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X < 3)$ для дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	1	2	3	4
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	c

§ 11. Непрерывные случайные величины

1. Плотность распределения непрерывной случайной величины.
2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.
3. Основные законы распределения непрерывных случайных величин.

1. Плотность распределения непрерывной случайной величины

Определение. *Плотностью распределения* $f(x)$ (*плотностью распределения вероятностей*, *плотностью вероятностей* или просто *плотностью*) непрерывной случайной величины *X* называется производная от её функции распределения $F(x)$, то есть

$$f(x) = F'(x).$$

Функцию $f(x)$ также называют *дифференциальной функцией распределения*. Она является одной из форм закона распределения случайной величины (существует только для непрерывной случайной величины).

Определение. График функции $f(x)$ плотности распределения непрерывной случайной величины *X* называют *кривой распределения*.

<u>Свойства плотности распределения.</u>

1. Плотность распределения $f(x)$ неотрицательна:

$$\forall x \;\; f(x) \ge 0.$$

Геометрически это свойство означает, что точки кривой распределения расположены либо над осью Ox, либо на этой оси.

2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал $(a;b)$ равна определённому интегралу от её плотности распределения в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Следствие. Из свойств 3, 5 функции распределения (см. §11 п. 3) и свойства 2 плотности распределения имеем

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

3. Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X выражается через плотность распределения $f(x)$ по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

4. Несобственный интеграл от плотности распределения в бесконечных пределах равен 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

В частности, если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Пример. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \;\; x \le 0, \\ x & при \;\; 0 < x \le 1, \\ 1 & при \;\; x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$ и вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0; 0,25)$.

Решение. По определению плотности распределения имеем $f(x) = F'(x)$. (Для вычисления производных воспользуемся Приложением 1: Таблица производных.)

Так как функция распределения $F(x)$ составная, то рассмотрим отдельно каждый из трёх промежутков:

1) при $x \le 0$ имеем $f(x) = 0' = 0$;

2) при $0 < x \le 1$ имеем $f(x) = x' = 1$;

3) при $x > 1$ имеем $f(x) = 1' = 0$.

Таким образом, запишем плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le 0, \\ 1 \ \ \textit{при} \ \ 0 < x \le 1, \\ 0 \ \ \textit{при} \ \ x > 1. \end{cases}$$

Найдём вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0; 0,25)$ согласно следствию из свойства 2:

$$P(0 < X < 0,25) = \int\limits_0^{0,25} f(x)dx = F(0,25) - F(0) = 0,25 - 0 = 0,25.$$

Пример. Плотность распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ \ \textit{при} \ \ x \le 0, \\ 2x \ \ \textit{при} \ \ 0 < x \le 1, \\ 0 \ \ \ \textit{при} \ \ x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Решение. Согласно свойству 3 плотности распределения имеем

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

(Для вычисления интегралов воспользуемся Приложением 2: Таблица основных интегралов.)

Рассмотрим промежутки:

1) при $x \le 0$ имеем $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0$;

2) при $0 < x \le 1$ имеем $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int\limits_{0}^{x} 2tdt =$

$$= 0 + \left.\left(\frac{2t^2}{2}\right)\right|_0^x = t^2\Big|_0^x = x^2 - 0 = x^2;$$

3) при $x > 1$ имеем $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int\limits_{0}^{1} 2tdt + \int\limits_{1}^{x} 0 \cdot dt =$

$$= 0 + t^2\Big|_0^1 + 0 = 1 - 0 = 1.$$

Запишем полученную функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \;\; x \le 0, \\ x^2 & при \;\; 0 < x \le 1, \\ 1 & при \;\; x > 1. \end{cases}$$

2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Непрерывные случайные величины имеют те же числовые характеристики с теми же свойствами, что и дискретные случайные величины, и определяются они аналогичным образом.

Пусть непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Приведём формулы для вычисления её числовых характеристик.

1) *Математическое ожидание* $M(X)$ равно

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Замечание. Если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx.$$

2) *Дисперсия* $D(X)$ равна

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(M(X)\right)^2.$$

Замечание. Если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - \left(M(X)\right)^2.$$

3) *Среднее квадратическое отклонение* $\sigma(X)$ равно

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X, заданной плотностью распределения $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 0,\\ 3(x^2-2x+1) & при\ \ 0<x\le 1,\\ 0 & при\ \ x>1.\end{cases}$$

Решение. Величина X принимает свои значения в интервале $(0;1)$, следовательно, согласно замечаниям имеем:

1) $M(X)=\int\limits_a^b xf(x)dx=\int\limits_0^1 x\cdot 3(x^2-2x+1)dx=3\int\limits_0^1(x^3-2x^2+x)dx=$

$$=3\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=3\left(\frac{1^4}{4}-\frac{2\cdot 1^3}{3}+\frac{1^2}{2}\right)-0=\frac{1}{4};$$

2) $D(X)=\int\limits_a^b x^2f(x)dx-\big(M(X)\big)^2=\int\limits_0^1 x^2\cdot 3(x^2-2x+1)dx-\left(\frac{1}{4}\right)^2=$

$$=3\int\limits_0^1(x^4-2x^3+x^2)dx-\frac{1}{16}=3\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1-\frac{1}{16}=$$

$$=3\left(\frac{1^5}{5}-\frac{1^4}{2}+\frac{1^3}{3}\right)-\frac{1}{16}=\frac{1}{10}-\frac{1}{16}=\frac{3}{80};$$

3) $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\dfrac{3}{80}}\approx 0,2$.

3. Основные законы распределения непрерывных случайных величин

При решении задач, которые выдвигает практика, приходится сталкиваться с различными распределениями непрерывных случайных величин.

Плотность распределения непрерывной случайной величины называют также *законом распределения*. Часто встречаются, например, законы равномерного, нормального и показательного распределений.

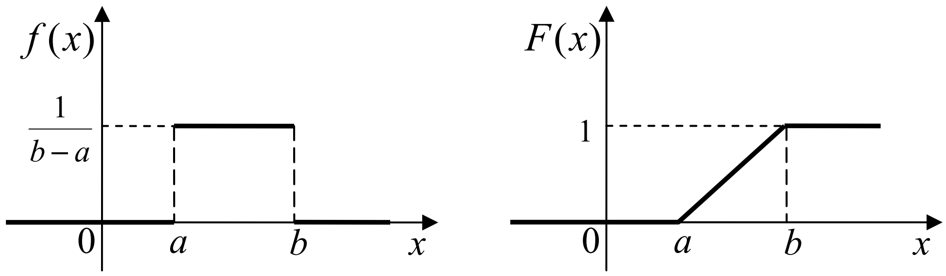
Определение. Непрерывная случайная величина X имеет *равномерное распределение* на отрезке $[a;b]$, если её плотность распределения $f(x)$ постоянна на этом отрезке, то есть имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<a,\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a\le x\le b,\\ 0 & \text{при} \quad x>b.\end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$ равномерно распределённой непрерывной случайной величины равна

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a\le x\le b,\\ 1 & \text{при} \quad x>b.\end{cases}$$

Приведём графики функций $f(x)$ и $F(x)$:



Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределённой непрерывной случайной величины X определяются по формулам:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}, \qquad D(X)\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Вероятность попадания равномерно распределённой непрерывной случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$, принадлежащий целиком отрезку $[a;b]$, равна

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

К случайным величинам, имеющим равномерное распределение, относятся: время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определённым интервалом, ошибка округления числа до целого, то есть случайные величины, все значения которых лежат внутри некоторого интервала и имеют одинаковую вероятность (плотность).

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет *показательное распределение*, если её плотность распределения имеет вид

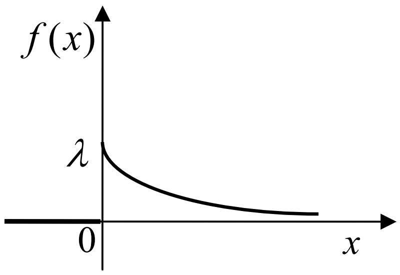
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\ge 0,\end{cases}$$

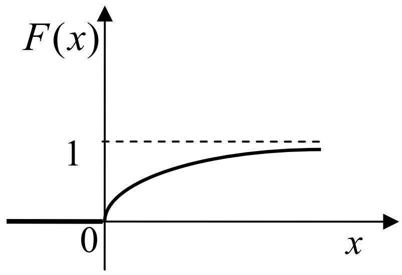
где λ – параметр распределения (постоянная положительная величина).

Функция распределения $F(x)$ показательного распределения равна

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\ge 0.\end{cases}$$

Приведём графики функций $f(x)$ и $F(x)$:





Для показательного распределения справедливы формулы:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, \qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}, \qquad P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Как видно, показательное распределение определяется одним параметром λ, что указывает на его преимущество по сравнению с другими распределениями, зависящими от большего числа параметров.

Показательное распределение используется в приложениях теории вероятностей, в физике, в теории надёжности. Оно используется для описания распределения случайной величины вида: длительность работы прибора до первого отказа, длительность времени обслуживания в системе массового обслуживания и т.д.

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет *нормальное распределение*, если плотность распределения имеет вид

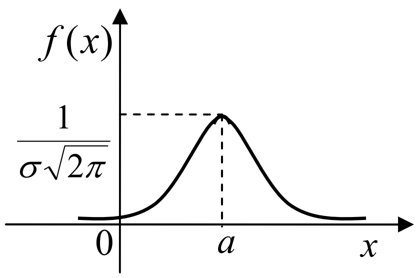
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ. Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение.

Вероятностный смысл этих параметров:
a – математическое ожидание,
σ – среднее квадратическое отклонение, то есть $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Определение. Кривую нормального распределения называют *нормальной кривой*, или *кривой Гаусса*.

Кривая Гаусса симметрична относительно прямой $x = a$. Её максимальное значение равно $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ при $x = a$. Ось абсцисс является асимптотой кривой Гаусса.



Вероятность попадания нормально распределённой непрерывной случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$ находится по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \quad (*)$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – *функция Лапласа*. Значение функции Лапласа определяется по таблице (см. Приложение 3). Отметим, что функция Лапласа нечётная (то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$) и $\Phi(\infty) = 0{,}5$.

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 3 и 2. Записать плотность распределения $f(x)$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу: а) $(-1;7)$, б) $(-\infty;5)$.

Решение. По условию, $a = 3$, $\sigma = 2$, следовательно, плотность распределения $f(x)$ запишется в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2\cdot 2^2}}, \text{ то есть } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}.$$

Для вычисления вероятностей воспользуемся формулой (*):

а) $P(-1 < X < 7) = \Phi\left(\dfrac{7-3}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{-1-3}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) =$

$= \Phi(2) + \Phi(2) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$;

б) $P(-\infty < X < 5) = \Phi\left(\dfrac{5-3}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{-\infty-3}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-\infty) =$

$= \Phi(1) + \Phi(\infty) = 0,3413 + 0,5 = 0,8413$.

«*Правило трёх сигм*»: практически достоверно, что нормально распределённая непрерывная случайная величина с параметрами a и σ принимает свои значения в промежутке $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$.

Нормальный закон играет исключительную роль в теории вероятностей. Главная особенность нормального закона состоит в том, что он является *предельным* законом, к которому приближаются, при определённых условиях, другие законы распределения.

Нормальному закону подчиняются ошибки измерений, величины износа деталей в механизмах, рост человека и т.д.

Контрольные вопросы к § 11

1. Дайте определение плотности распределения непрерывной случайной величины.
2. Что называют кривой распределения?
3. Сформулируйте свойства плотности распределения.
4. Как вычисляются математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины?
5. Изобразите графики функции и плотности равномерного распределения.
6. Изобразите графики функции и плотности показательного распределения.
7. Изобразите график плотности нормального распределения.

Задачи

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{\textit{при}}\ \ x \le 1, \\ a(x^2 - 1) & \text{\textit{при}}\ \ 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{\textit{при}}\ \ x > 2. \end{cases}$$

Найти параметр a, плотность распределения $f(x)$ и вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение:

а) заключённое в интервале $(1{,}5;2)$; б) меньшее 0,5;

в) меньшее 1,5; г) не меньшее 1,5;

д) не меньшее 3.

2. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 1,\\ 1/x & при\ \ 1<x\le e,\\ 0 & при\ \ x>e.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

3. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 0,\\ a\sin x & при\ \ 0<x\le \pi,\\ 0 & при\ \ x>\pi.\end{cases}$$

Найти параметр a, вероятность попадания величины X в промежуток $(0;\pi/4)$.

4. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 1,\\ a(x^3+1) & при\ \ 1<x\le 2,\\ 0 & при\ \ x>2.\end{cases}$$

Найти параметр a, вероятность попадания величины X в промежуток $(1{,}5;2)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ величины X. Найти функцию распределения $F(x)$.

5. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\dfrac{2}{9}x$ в интервале $(0;3)$. Вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X.

6. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0;6]$. Найти функции $F(x)$, $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение величины X и вероятность попадания величины X в промежуток $(1;2)$.

7. Математическое ожидание нормально распределённой величины X равно 7, дисперсия равна 16. Записать плотность распределения $f(x)$.

Домашнее задание

8. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \;\; x\le 0,\\ ax & при \;\; 0<x\le 2,\\ 1 & при \;\; x>2.\end{cases}$$

Найти параметр a, плотность распределения $f(x)$ и вероятность того, что в результате испытания X примет значение: а) заключённое в интервале $(1;2)$; б) меньшее 1; в) не меньшее 4.

9. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \;\; x\le 0,\\ a(x^2+2) & при \;\; 0<x\le 2,\\ 0 & при \;\; x>2.\end{cases}$$

Найти параметр a, вероятность попадания величины X в промежуток $(1;2)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X. Найти функцию распределения $F(x)$.

Дополнительные задачи

10. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}c\cos x & при \;\; -\pi/2\le x\le \pi/2,\\ 0 & при \;\; x<-\pi/2;\; x>\pi/2.\end{cases}$$

Найти c, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P(\pi/6<x<\pi/3)$.

11. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \;\; x\le 1,\\ 0{,}5(x^3-x^2+x-1) & при \;\; 1<x\le 2,\\ 1 & при \;\; x>2.\end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(1<x<1{,}5)$.

12. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x<2,\\ \dfrac{a}{x-1} & при\ \ 2\le x\le 3,\\ 0 & при\ \ x>3.\end{cases}$$

Найти a, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P(1<x<2{,}5)$.

13. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 0,\\ x^2/(4m) & при\ \ 0<x\le 2m,\\ 1 & при\ \ x>2m.\end{cases}$$

Найти m, плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X, вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;1)$.

14. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 0,\\ 0{,}5(1-\cos x) & при\ \ 0<x\le a,\\ 1, & при\ \ x>a.\end{cases}$$

Найти a, плотность распределения $f(x)$, вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\pi/4;\pi/3)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

15. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x)=Ae^{ax^2+bx+c}.$$

Найти A, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, вероятность $P(x_1\le X\le x_2)$, если

a	b	c	x_1	x_2
-4	6	2	0	0,75
1	5	6	0	0,5

16. Непрерывная случайная величина X задана своей плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<-3,\\ A(x-3) & при \quad -3\le x\le 1,\\ 0 & при \quad x>1.\end{cases}$$

Найти A, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X, вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;1)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

§ 12. Математические методы обработки статистической информации

1. Генеральная и выборочная совокупности.
2. Статистическое распределение выборки.
3. Полигон и гистограмма.
4. Числовые характеристики вариационного ряда.

Математическая статистика – это раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений (*статистических данных*).

Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей. Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении статистических данных методами теории вероятностей.

1. Генеральная и выборочная совокупности

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты.

Иногда для этого проводят сплошное обследование, то есть обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются.

На практике сплошное обследование применяют сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование фактически невозможно. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Определение. *Выборочной совокупностью* или *выборкой* называют совокупность случайно отобранных объектов.

Определение. *Генеральной совокупностью* называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Определение. *Объёмом* совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

Примеры.

1) Пусть из 1000 студентов отобрано для тестирования 100 человек, тогда объём генеральной совокупности $N = 1000$, а объём выборки $n = 100$.

2) Количество детей в группах детского сада составило 18, 20, 24, 25, 26, 28, 30, 30. Найти объём выборки.

Решение. В данном случае объём выборки – это количество групп, в которых подсчитали число детей, поэтому $n = 8$.

2. Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объектов по некоторому признаку *X*, причём значение x_1 наблюдалось n_1 раз, $x_2 - n_2$ раз, …, $x_k - n_k$ раз.

Определение. *Вариантами* называют наблюдаемые значения x_i признака.

Определение. *Вариационным рядом* называется последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке.

Определение. *Частотами* называются числа n_i, показывающие, сколько раз встречаются варианты x_i в ряде наблюдений.

Определение. *Относительной частотой* называется отношение частоты к объёму выборки:

$$W_i = \frac{n_i}{n}.$$

Здесь *n* – это объём выборки.

Замечания.

1. Сумма всех частот равна объёму выборки:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$$

2. Сумма всех относительных частот равна единице:

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = W_1 + W_2 + \ldots + W_k = 1.$$

Определение. *Статистическим распределением выборки* или *статистическим рядом* называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Записывается статистическое распределение в виде таблицы: первая строка содержит варианты, а вторая – их частоты или относительные частоты.

Таким образом, для выборки можно записать

1) статистическое распределение частот:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

2) статистическое распределение относительных частот:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
W_i	W_1	W_2	$\ldots$	W_k

Заметим, что в теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.

Пример. В результате тестирования группа студентов набрала баллы: 3, 5, 1, 4, 5, 0, 4, 3, 3, 3. Записать полученную выборку в виде вариационного ряда и статистического ряда.

Решение. Объём данной выборки равен $n = 10$.

Запишем варианты в порядке возрастания, таким образом, получим вариационный ряд:

0, 1, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5.

Запишем статистическое распределение частот выборки:

x_i	0	1	3	4	5
n_i	1	1	4	2	2

Проверка:

$$\sum_{i=1}^{5} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 1 + 1 + 4 + 2 + 2 = 10 = n .$$

Найдём относительные частоты выборки:

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{1}{10} = 0,1; \quad W_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{1}{10} = 0,1; \quad W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{4}{10} = 0,4;$$

$$W_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{2}{10} = 0,2; \quad W_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{2}{10} = 0,2.$$

Тогда статистическое распределение относительных частот выборки имеет вид:

x_i	0	1	3	4	5
W_i	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2

Проверка:

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 0,1 + 0,1 + 0,4 + 0,2 + 0,2 = 1.$$

Если число значений признака велико или признак является непрерывным, то составляют *интервальный статистический ряд*. В первую строку таблицы интервального статистического распределения записывают частичные интервалы, обычно одинаковой длины h, а во вторую строку – сумму частот n_i, попавших в каждый интервал.

Для определения величины интервала h можно использовать формулу Стерджеса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n},$$

причём $m = 1 + \log_2 n$ – это число интервалов ($\log_2 n \approx 3,322 \lg n$).

За начало первого интервала рекомендуется брать величину

$$x_{нач} = x_{\min} - \frac{h}{2}.$$

3. Полигон и гистограмма

Для наглядности строят различные графики статистического распределения, в частности, полигон и гистограмму.

Полигон, как правило, служит для изображения дискретного статистического ряда, то есть когда варианты отличаются на постоянную величину.

Пусть выборка задана статистическим распределением частот:

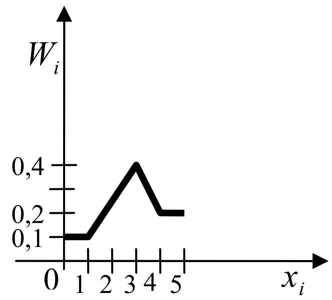
x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Определение. *Полигоном частот* называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1,n_1), (x_2,n_2), …, (x_k,n_k).

Аналогично получают полигон относительных частот.

Пример. Построим полигон относительных частот для выборки из примера п. 2. по уже известному статистическому распределению относитеольных частот:

x_i	0	1	3	4	5
W_i	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2



Для непрерывно распределённого признака, то есть когда варианты могут отличаться друг от друга на сколь угодно малую величину, целесообразно строить гистограмму. Для этого интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Определение. *Гистограммой частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (*плотность часто*ты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии $\frac{n_i}{h}$.

Определение. *Гистограммой относительных частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{W_i}{h}$ (*плотность относительной частоты*).

Замечания.

1. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объёму выборки: $n = h \cdot \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{n_i}{h}$.

2. Если соединить середины верхних оснований прямоугольников отрезками, то получим полигон того же распределения.

3. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть единице.

Пример. Измерили рост (с точностью до см.) 30 наудачу отобранных студентов:

178, 160, 154, 183, 155, 153, 167, 186, 163, 155,
157, 175, 170, 166, 159, 173, 182, 167, 171, 169,
179, 165, 156, 179, 158, 171, 175, 173, 164, 172.

Построить интервальный статистический ряд и гистограмму частот.

Решение. Для удобства построим вариационный ряд:

153, 154, 155, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 163,
164, 165, 166, 167, 167, 169, 170, 171, 171, 172,
173, 173, 175, 175, 178, 179, 179, 182, 183, 186.

Отметим, что рост студента – это непрерывно распределённый признак (при более точном измерении роста значения обычно не повторяются).

Для определения величины интервала h воспользуемся формулой Стерджеса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n}.$$

Для данной выборки $x_{\max} = 186$, $x_{\min} = 153$, $n = 30$, тогда число частичных интервалов равно $m = 1 + \log_2 30 = 5{,}907 \approx 6$. Следовательно, получим

$$h = \frac{186 - 153}{6} = 5{,}5.$$

Примем $h = 6$.

За начало первого интервала возьмём величину

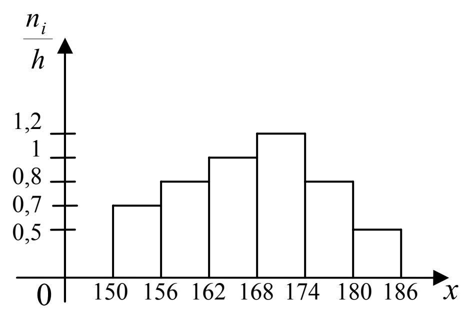
$$x_{нач} = x_{\min} - \frac{h}{2} = 153 - \frac{6}{2} = 150 \cdot$$

Разобьём данные выборки на 6 интервалов длиной $h = 6$:

(150;156), [156;162), [162;168),
[168;174), [174;180), [180;186].

Подсчитаем число студентов (n_i), попавших в каждый из полученных интервалов, и запишем интервальный статистический ряд исходной выборки.

Частичный интервал длиною $h = 6$	Сумма частот вариант частичного интервала n_i	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
(150;156)	4	0,7
[156;162)	5	0,8
[162;168)	6	1
[168;174)	7	1,2
[174;180)	5	0,8
[180;186]	3	0,5



4. Числовые характеристики вариационного ряда

Для выборки можно определить числовые характеристики, аналогичные тем, что в теории вероятностей определялись для случайных величин.

Рассмотрим статистическое распределение частот выборки объёма n:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Определение. *Выборочной средней* $\overline{x}_в$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n}.$$

Определение. *Выборочной дисперсией* $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней $\overline{x}_в$:

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_в)^2 \cdot n_i}{n} =$$

$$= \frac{(x_1 - \overline{x}_в)^2 n_1 + (x_2 - \overline{x}_в)^2 n_2 + \ldots + (x_n - \overline{x}_в)^2 n_k}{n}.$$

Выборочная дисперсия характеризует, насколько варианты отклоняются от выборочной средней $\overline{x}_в$ в данной выборке. Чем больше дисперсия, тем больше отклонение или разброс данных.

Выборочная дисперсия может быть подсчитана также по формуле

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i)^2 \cdot n_i}{n} - (\overline{x}_в)^2 = (\overline{x^2})_в - (\overline{x}_в)^2.$$

Определение. *Выборочным средним квадратическим отклонением* $\sigma_в$ называется квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}.$$

Для непрерывно распределённого признака формулы для выборочных средней, дисперсии и средного квадратического отклонения будут такими же, но вместо значений x_1, x_2, …, x_k надо брать середины частичных интервалов.

Для описания вариационного ряда используют также моду, медиану, размах и коэффициент вариации.

Определение. *Модой* M_0 вариационного ряда называется варианта, имеющая наибольшую частоту.

Определение. *Медианой* m_e вариационного ряда называется варианта, которая делит вариационный ряд пополам.

Если число вариант нечётно, то есть $n = 2k + 1$, то $m_e = x_{k+1}$.

Если число вариант чётно, то есть $n = 2k$, то $m_e = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Определение. *Размахом варьирования* R или *размахом вариации* вариационного ряда называется разность между наибольшей и наименьшей вариантами:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Определение. *Коэффициентом вариации* V называют выраженное в процентах отношение выборочного среднего квадратического отклонения $\sigma_в$ к выборочной средней $\overline{x}_в$:

$$V = \frac{\sigma_в}{\overline{x}_в} \cdot 100\%.$$

Коэффициент вариации служит для сравнения величины рассеяния по отношению к выборочной средней двух вариационных рядов: тот из рядов имеет большее рассеяние по отношению к выборочной средней, у которого коэффициент вариации больше.

Пример. Найти числовые характеристики выборки, заданной статистическим распределением частот:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Решение. Объём выборки $n = 20$.

1) Выборочная средняя:

$$\overline{x}_в = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3}{n} = \frac{2 \cdot 3 + 6 \cdot 10 + 12 \cdot 7}{20} = \frac{150}{20} = 7{,}5.$$

2) Выборочная дисперсия:

$$D_в = \frac{(x_1 - \overline{x}_в)^2 n_1 + (x_2 - \overline{x}_в)^2 n_2 + (x_3 - \overline{x}_в)^2 n_3}{n} =$$

$$=\frac{(2-7{,}5)^2\cdot 3+(6-7{,}5)^2\cdot 10+(12-7{,}5)^2\cdot 7}{20}=$$

$$=\frac{3\cdot(-5{,}5)^2+10\cdot(-1{,}5)^2+7\cdot 4{,}5^2}{20}=\frac{3\cdot 30{,}25+10\cdot 2{,}25+7\cdot 20{,}25}{20}=$$

$$=\frac{90{,}75+22{,}5+141{,}75}{20}=\frac{255}{20}=12{,}75.$$

Найдём выборочную дисперсию по другой формуле:

$$D_в=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i)^2\cdot n_i}{n}-(\overline{x}_в)^2=(\overline{x^2})_в-(\overline{x}_в)^2.$$

Запишем статистическое распределение для квадратов вариант выборки:

x_i^2	4	36	144
n_i	3	10	7

Тогда получим $(\overline{x^2})_в$:

$$(\overline{x^2})_в=\frac{4\cdot 3+36\cdot 10+144\cdot 7}{20}=\frac{12+360+1008}{20}=\frac{1380}{20}=69.$$

Следовательно, выборочная дисперсия равна

$$D_в=(\overline{x^2})_в-(\overline{x}_в)^2=69-(7{,}5)^2=69-56{,}25=12{,}75.$$

3) Выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_в=\sqrt{D_в}=\sqrt{12{,}75}\approx 3{,}57.$$

4) Мода $M_0=6$ (имеет наибольшую частоту $n_2=10$).

5) Для вычисления медианы рассмотрим объём выборки $n=20$ – число чётное, то есть его можно представить в виде $n=2k$, здесь $k=10$. Тогда медиана равна

$$m_e=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}=\frac{x_{10}+x_{11}}{2}=\frac{6+6}{2}=6.$$

6) Размах варьирования $R=x_{\max}-x_{\min}=12-2=10$.

7) Коэффициент вариации:

$$V=\frac{\sigma_в}{\overline{x}_в}\cdot 100\%=\frac{3{,}57}{7{,}5}\cdot 100\%=47{,}6\%.$$

Пример. Для ряда 2, 3, 5, 6, 7 медиана равна 5.

Пример. Дана выборка –1, 0, 5, –4, –1, 7. Найти её медиану.

Решение. Запишем вариационный ряд: –4, –1, –1, 0, 5, 7. Тогда медиана равна $m_e = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{-1+0}{2} = -0{,}5$.

Контрольные вопросы к § 12

1. Что является предметом математической статистики?
2. Дайте определение выборки, генеральной совокупности и объёма совокупности.
3. Что называют вариантами, вариационным рядом, частотами и относительной частотой?
4. Дайте определение статистического распределения выборки.
5. Что называют полигоном и гистограммой частот выборки?
6. Дайте определение выборочной средней, выборочной дисперсии и выборочного среднего квадратического отклонения.
7. Что называют модой, медианой, размахом варьирования и коэффициентом вариации вариационного ряда?

Задачи

1. В концерте принимали участие артисты следующего возраста: 55, 40, 18, 22, 23, 41, 22. Найти объём данной выборки.

2. Найти объём выборки, статистическое распределение частот которой имеет вид:

x_i	2	4	6	8	9
n_i	1	7	4	3	5

3. Найти *k*, если дано статистическое распределение частот выборки объёма $n = 20$:

x_i	2	4	5	7	8
n_i	3	1	2	k	4

4. Найти относительную частоту варианты $x_1 = 2$ выборки, статическое распределение частот которой имеет вид:

x_i	2	3	7	10
n_i	4	7	5	4

5. В результате опытов получена следующая выборка:

3, 6, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 4, 5.

Найти объём выборки, записать вариационный ряд, составить статистическое распределение частот и статистическое распределение относительных частот выборки. Построить полигон частот.

6. Определить объём выборки по заданному полигону частот (рис. 1).

7. Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма $n = 54$. Найти частоту варианты $x_3 = 3$ выборки по заданному полигону частот (рис. 2).

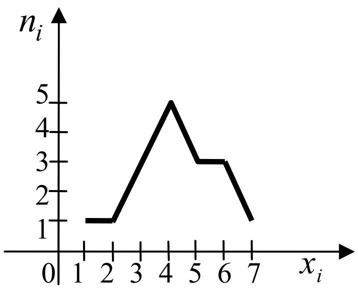


рис. 1

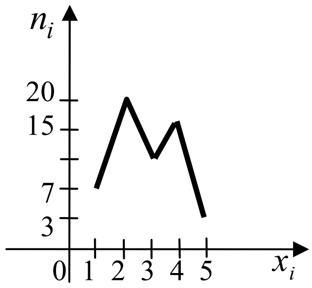


рис. 2

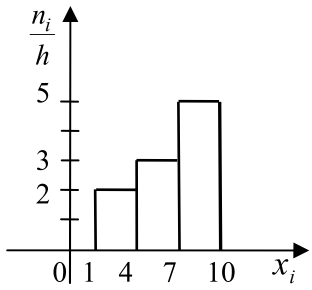


рис. 3

8. Определить объём выборки по заданной гистограмме частот (рис. 3).

9. Найти медиану m_e вариационного ряда 3, 5, 6, 7, 8.

10. Найти медиану m_e выборки –10, –12, –13, –9, –4.

11. Дана выборка 11, 2, 11, 9, 8, 11, 14, 3. Найти её медиану m_e, моду M_0 и размах варьирования *R*.

12. Дана выборка, статистическое распределение частот которой имеет вид:

x_i	–1	0	1	3
n_i	3	2	1	4

Найти числовые характеристики выборки: выборочную среднюю $\overline{x}_в$, выборочную дисперсию $D_в$, выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$, моду M_0, медиану m_e, размах варьирования R, коэффициент вариации V.

13. Исследовать Вашу группу по возрасту: составить вариационный ряд и статистическое распределение частот и относительных частот; построить полигон частот; найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, моду, медиану, размах варьирования, коэффициент вариации.

Домашнее задание

14. Путём опроса получены следующие данные о возрасте (число полных лет) студентов первого курса:

19, 20, 18, 21, 17, 18, 17, 18, 17, 20,
17, 18, 17, 21, 17, 20, 22, 17, 19, 18.

Найти объём выборки. Составить вариационный ряд и статистическое распределение частот и относительных частот студентов по возрасту. Построить полигон частот. Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, моду, медиану, размах варьирования, коэффициент вариации.

15. Измерили рост (в см.) наудачу отобранных детей в детском саду. Результаты измерений таковы:

98, 97, 95, 92, 93, 94, 96, 95, 93, 92,
96, 93, 92, 96, 90, 91, 95, 94, 100, 101,
91, 93, 96, 95, 95, 92, 91, 96, 98, 90.

Составить статистическое распределение относительных частот. Найти моду, медиану и размах варьирования выборки. Построить полигон относительных частот.

Дополнительные задачи

16. Выборка задана статистическим распределением частот:

x_i	4	7	8	12	17
n_i	2	4	5	6	3

Найти статистическое распределение относительных частот, моду, медиану и размах варьирования выборки.

17. Путём опроса получены следующие данные о числе баллов, полученных абитуриентами на вступительном экзамене:

12, 15, 20, 17, 16, 18, 18, 19, 19, 14,
16, 13, 12, 13, 13, 15, 16, 14, 14, 16,
17, 12, 15, 16, 15, 12, 13, 13, 15, 17.

Составить статистическое распределение частот полученной выборки. Найти размах варьирования и построить полигон частот.

18. Пусть статистическое распределение выборки частот имеет вид:

x_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	4	5	3	5	5	3	2	2	1

Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации выборки.

19. Игральную кость подбросили 60 раз. Получены следующие результаты:

3, 2, 5, 6, 6, 1, 4, 6, 4, 6, 3, 6, 4, 2, 1, 5, 3, 1, 6, 4,
5, 4, 2, 2, 4, 2, 6, 3, 1, 5, 6, 1, 6, 6, 4, 2, 5, 4, 3, 6,
4, 1, 5, 6, 3, 2, 4, 4, 5, 2, 5, 6, 2, 3, 5, 4, 1, 2, 5, 3.

а) Записать выборку в виде вариационного ряда и статистического ряда частот.

б) Построить полигон частот выборки.

в) Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, моду, медиану, размах варьирования, коэффициент вариации выборки.

20. На телефонной станции производились наблюдения за числом неправильных соединений в минуту. Результаты наблюдений в течение часа представлены в виде статистического распределения частот (см. таблицу). Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию выборки.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	8	17	16	10	6	2	1

Расчётно-графическая работа

Задача 1

В группе переводчиков x_a человек владеет английским языком, x_f – французским, x_n – немецким. При этом x_{af} переводчиков владеют английским и французским языками, x_{an} – английским и немецким, x_{fn} – французским и немецким, x_{all} переводчика владеют всеми тремя языками. Сколько переводчиков в группе?

Вариант	x_a	x_f	x_n	x_{af}	x_{an}	x_{fn}	x_{all}
1	15	19	8	9	7	6	4
2	25	29	18	19	17	16	14
3	20	25	15	14	12	11	9
4	19	15	9	6	7	4	3
5	14	12	19	3	4	8	1
6	17	19	20	14	9	4	2
7	21	31	40	14	18	10	3
8	17	19	20	19	10	7	5
9	18	14	12	3	8	9	3
10	15	19	15	9	9	7	5

Задача 2

Решить уравнения.

1. а) $4x^2–4x+5=0$; б) $x^2–x+1+i=0$.
2. а) $9x^2–6x+5=0$; б) $x^2–(3+i)x+8–i=0$.
3. а) $9x^2–12x+8=0$; б) $2x^2–(3–3i)x+3–i=0$.
4. а) $9x^2+6x+2=0$; б) $x^2–(6–i)x+14–10i=0$.
5. а) $4x^2–8x+13=0$; б) $8x^2–(24–14i)x+4–19i=0$.
6. а) $9x^2–18x+25=0$; б) $6x^2–(5+7i)x–1+3i=0$.
7. а) $x^2–10x+29=0$; б) $(1–i)x^2–(1+2i)x+1=0$.
8. а) $x^2+8x+25=0$; б) $12x^2–(17–10i)x+4–7i=0$.
9. а) $2x^2–14x+25=0$; б) $9x^2–21x+16–2i=0$.
10. а) $25x^2+60x+52=0$; б) $8x^2+(4+6i)x–1+i=0$.

Задача 3

Проверить, является ли формула тавтологией.

1. $\left(A \to \left(A \wedge \overline{(B \vee C)}\right)\right) \leftrightarrow \overline{A} \vee \left(\overline{B} \wedge \overline{C}\right)$.

2. $(A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)$.

3. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.

4. $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$.

5. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \leftrightarrow \left(\overline{A} \vee \overline{B} \to C\right)$.

6. $(A \to C) \to (A \vee B \to C \vee B)$.

7. $(A \to B \wedge C) \leftrightarrow (A \to B) \wedge (A \to C)$.

8. $(A \to B) \to (A \wedge C \to B \wedge C)$.

9. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$.

10. $\overline{\left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right)} \leftrightarrow A \wedge B \wedge C$.

Задача 4

1. Сколькими способами можно из одной 50-копеечной, шести 10-копеечных и восьми 5-копеечных монет набрать 1 рубль?

2. Сколько различных «слов» из пяти (трёх) букв можно составить из букв слова КНИГА?

3. На школьном вечере присутствуют 22 парня и 33 девушки. Сколько различных танцевальных пар можно образовать из них?

4. У человека есть 6 знакомых мужчин и 4 знакомые женщины. Сколько дней потребуется для того, чтобы при ежедневном приглашении двух женщин и одного мужчины были различные компании?

5. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5? Сколько из них делится на 5?

6. В хирургическом отделении работает 20 врачей. Сколькими способами из них можно образовать бригады в составе хирурга и трёх ассистентов?

7. В роте служит 4 офицера, 8 сержантов и 120 солдат. Сколькими способами можно выделить из них наряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и 10 солдат?

8. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек. Сколькими способами они могут накрыть на стол для чаепития, если каждый получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку?

9. В классе 30 учащихся, из них 12 девушек. Сколькими способами от класса можно выбрать делегацию в составе 3 юношей и 2 девушек?

10. Класс из 30 человек должен выставить команду для участия в соревнованиях по эстафете из 4 человек. Сколькими способами можно составить такую команду?

Задача 5

1. В магазин поступило 30 новых телевизоров, среди которых 5 имеют скрытые дефекты. Наудачу отбирается один телевизор. Какова вероятность того, что он не имеет скрытых дефектов?

2. Автомат изготавливает однотипные детали, причём технология изготовления такова, что 5 % произведённой продукции оказывается бракованной. Из большой партии взята наудачу одна деталь для контроля. Найти вероятность того, что деталь бракованная.

3. Игральная кость подбрасывается один раз. Найти вероятность того, что число выпавших очков кратно трём.

4. Наудачу выбирается пятизначное число. Какова вероятность того, что число одинаково как слева направо, так и справа налево?

5. Игральная кость подбрасывается один раз. Найти вероятность того, что число выпавших очков меньше пяти.

6. Подбрасываются две игральные кости. Найти вероятность того, что число очков на обеих костях совпадают.

7. Наудачу выбирается пятизначное число. Какова вероятность того, что оно состоит из нечётных чисел?

8. Подбрасываются две игральные кости. Найти вероятность того, что число очков на первой кости больше, чем на второй.

9. 1-го сентября на первом курсе одного из факультетов запланировано по расписанию три лекции по разным предметам. Всего на первом курсе изучается 10 предметов. Студент, не успевший ознакомиться с расписанием, пытается его угадать. Какова вероятность успеха?

10. Подбрасываются две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков чётная.

Задача 6

1. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 3 изделия. Найти вероятность того, что ровно одно из них бракованное.

2. Из полного набора домино наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность того, что среди них окажется, по крайней мере, одна кость с шестью очками?

3. Из десяти первых букв алфавита наудачу выбирают 5 букв. Найти вероятность того, что среди них будет буква А.

4. Из 3 первокурсников, 5 второкурсников и 7 третьекурсников выбирают 5 человек на конференцию. Найти вероятность того, что будут выбраны одни третьекурсники.

5. Из десяти первых букв русского алфавита наудачу выбираются 5 букв. Найти вероятность того, что среди них будут только согласные (букву Ё считать).

6. Из 3 первокурсников, 5 второкурсников и 7 третьекурсников выбирают 5 человек на конференцию. Найти вероятность того, что все первокурсники попадут на конференцию.

7. Для уменьшения числа игр 16 команд, среди которых «Спартак» и «Динамо», случайным образом разбиваются на 2 равные подгруппы. Какова вероятность того, что «Спартак» и «Динамо» попадут в разные подгруппы?

8. Из 3 первокурсников, 5 второкурсников и 7 третьекурсников выбирают 6 человек на конференцию. Найти вероятность того, что на конференцию не будет выбрано ни одного второкурсника.

9. Из колоды в 52 карты извлекают наудачу 4 карты. Найти вероятность того, что все карты бубновой масти.

10. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Найти вероятность того, что два первых по очереди студента взяли «хорошие» билеты.

Задача 7

1. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,99 для 1-го сигнализатора и 0,95 для второго. Найти вероятность, что при аварии сработает только один сигнализатор.

2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8, а для второго – 0,9. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадаёт только один из стрелков.

3. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,325. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из двух орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,75.

4. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,95. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

5. Вероятность ошибочного измерения равна 0,4. Произведено три независимых измерения. Найти вероятность того, что только одно из них ошибочное.

6. Вероятность того, что колбаса высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трёх проверенных сортов колбасы только два высшего сорта.

7. Купили трёх попугаев. Вероятности того, что попугаи заговорят, равны 0,6; 0,7; 0,8 соответственно. Найти вероятность того, что заговорит только один из попугаев.

8. Брошено три игральные кости. Найти вероятность того, что на каждой из выпавших граней появится 5 очков.

9. Брошено три игральные кости. Найти вероятность того, что на всех выпавших гранях появится разное число очков.

10. Сколько надо бросить игральных костей, чтобы с вероятностью, меньшей 0,2, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится 1 очко.

Задача 8

Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение. Её математическое ожидание равно a, среднее квадратическое отклонение равно σ (см. таблицу). Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале $(\alpha;\beta)$.

Вариант	a	σ	α	β	**Вариант**	a	σ	α	β
1	10	1	8	14	**6**	12	1	7	14
2	12	2	8	14	**7**	14	2	9	18
3	14	3	10	15	**8**	16	3	8	16
4	16	2	15	18	**9**	10	2	10	20
5	18	3	10	14	**10**	8	1	17	25

Задача 9

Выборка задана статистическим распределением частот (см. таблицу). Найти:

1) статистическое распределение относительных частот;
2) выборочную среднюю;
3) выборочную дисперсию;
4) выборочное среднее квадратическое отклонение;
5) коэффициент вариации;
6) размах варьирования;
7) моду и медиану.

Построить полигон частот.

1.

x_i	18,4	18,9	19,3	19,6
n_i	5	10	20	15

2.

x_i	0,1	0,5	0,6	0,8
n_i	5	15	20	10

3.

x_i	0,01	0,05	0,09	0,08
n_i	2	3	4	1

4.

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

5.

x_i	23,5	26,1	28,2	30,4
n_i	2	3	4	1

6.

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

7.

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

8.

x_i	15	20	25	30
n_i	10	15	30	20

9.

x_i	2	4	5	7
n_i	15	20	10	15

10.

x_i	1	4	5	8
n_i	15	25	30	20

Решение типового варианта

Задача 1

На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Задачу по алгебре решили 810, по планиметрии – 710, а по стереометрии – 610 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии – 500, по планиметрии и стереометрии – 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Сколько абитуриентов сдавали экзамен и решили хотя бы одну задачу?

Решение. Рассмотрим следующие множества:
A – множество абитуриентов, решивших задачу по алгебре,
B – множество абитуриентов, решивших задачу по планиметрии,
C – множество абитуриентов, решивших задачу по стереометрии.

По условию задачи известно, что
$n(A)=810$, $n(B)=710$, $n(C)=610$,
$n(A\cap B)=600$, $n(A\cap C)=500$, $n(B\cap C)=400$,
$n(A\cap B\cap C)=300$.

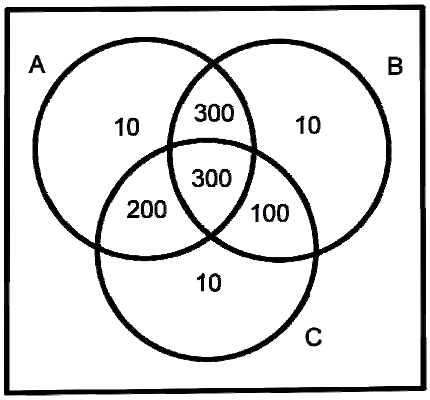
Тогда множество $A\cup B\cup C$ – это множество всех абитуриентов, решивших хотя бы одну задачу. Для нахождения его численности воспользуемся формулой

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-$$
$$-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C).$$

Получим

$$n(A \cup B \cup C) = 810 + 710 + 610 - 600 - 500 - 400 + 300 = 930.$$

Проиллюстрируем решение с помощью диаграммы Эйлера-Венна. Укажем для каждого из следующих множеств их численности:



множество	численность
$A \cap B \cap C$	300
$(A \cap B) \setminus C$	$600 - 300 = 300$
$(A \cap C) \setminus B$	$500 - 300 = 200$
$(B \cap C) \setminus A$	$400 - 300 = 100$
$A \setminus (B \cup C)$	$810 - (300 + 300 + 200) = 10$
$B \setminus (A \cup C)$	$710 - (300 + 300 + 100) = 10$
$C \setminus (A \cup B)$	$610 - (300 + 200 + 100) = 10$

Так как все перечисленные множества не пересекаются, то для нахождения $n(A \cup B \cup C)$ достаточно сложить все записанные числа в диаграмме Эйлера-Венна, то есть

$$n(A \cup B \cup C) = 300 + 300 + 200 + 100 + 10 + 10 + 10 = 930.$$

Ответ: 930 абитуриентов решили хотя бы одну задачу.

Задача 2

Решить уравнения:

а) $x^2 - 6x + 13 = 0$; б) $x^2 - (3 + 2i)x + 6i = 0$.

Решение.

Оба уравнения являются квадратными вида $ax^2 + bx + c = 0$, которые решаются по известным формулам:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

а) Найдём дискриминант уравнения $x^2 - 6x + 13 = 0$:

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 13 = 36 - 52 = -16 = -1 \cdot 16 = i^2 \cdot 4^2 = (4i)^2$,

откуда получим $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$ – два комплексно сопряжённых корня.

б) Для уравнения $x^2 - (3 + 2i)x + 6i = 0$ выпишем коэффициенты $a = 1$, $b = -(3 + 2i)$, $c = 6i$. Тогда дискриминант уравнения равен

$D=(3+2i)^2-4\cdot 6i=9+12i-4-24i=5-12i$.

Вычислим $\sqrt{D}$:

$$\sqrt{5-12i}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{5^2+(-12)^2}+5}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{5^2+(-12)^2}-5}{2}}\right]=$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{169}+5}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{169}-5}{2}}\right]=\pm(3-2i).$$

Тогда получим корни $x_{1,2}=\dfrac{(3+2i)\pm(3-2i)}{2}$, откуда

$$x_1=\frac{3+2i+3-2i}{2}=3,\ x_2=\frac{3+2i-3+2i}{2}=2i.$$

Ответ: а) $x_{1,2}=3\pm 2i$; б) $x_1=3$, $x_2=2i$.

Задача 3

Проверить, является ли формула тавтологией:

$$((\overline{A}\vee B)\leftrightarrow(C\wedge\overline{B}))\to C.$$

Решение. Рассмотрим формулу $((\overline{A}\vee B)\leftrightarrow(C\wedge\overline{B}))\to C\equiv(*)$. Составим для неё таблицу истинности:

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\vee B$	$C\wedge\overline{B}$	$(\overline{A}\vee B)\leftrightarrow(C\wedge\overline{B})$	*
1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1

Как видим, в последнем столбце не все цифры равны единице, следовательно, данная формула не является тавтологией.

Ответ: формула не является тавтологией.

Задача 4

Сколькими способами можно выбрать 3 пирожных из 7 сортов пирожных?

Решение. Согласно схеме решения комбинаторных задач (см. § 7), получим:

1) находим основное множество, из которого осуществляется выбор – это сорта пирожных, а значит $n = 7$;

2) так как требуется выбрать часть элементов (3 пирожных) основного множества, то $k = 3$ – количество элементов множества выбора;

3) порядок элементов во множестве выбора не важен, то есть имеем сочетания без повторений (см. (5), § 7):

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)! \cdot} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4!} = 5 \cdot 7 = 35.$$

Ответ: 35 способов.

Задача 5

В урне имеется 10 шаров: 3 красных и 7 чёрных. Какова вероятность вынуть чёрный шар, если вынимается один шар?

Решение. Пусть событие A – вынуть чёрный шар, тогда $m = 7$ – количество чёрных шаров, $n = 10$ – количество всех шаров. Тогда вероятность вынуть чёрный шар есть

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Ответ: 0,7.

Задача 6

В цехе работают 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

Решение. Рассмотрим события:

A – первым отобран мужчина,

B – вторым отобран мужчина,

C – третьим отобран мужчина.

Тогда событие ABC – отобраны трое мужчин – искомое событие. Так как события A, B, C зависимые, то воспользуемся теоремой 2 § 9:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C),$$

где $P(A) = \dfrac{7}{10}$, а условные вероятности равны

$$P_A(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad P_{AB}(C) = \frac{5}{8}.$$

Получим $P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{8} = \dfrac{7}{24}$.

Ответ: $\dfrac{7}{24}$.

Задача 7

Три стрелка производят по одному выстрелу в цель независимо друг от друга. Вероятности попадания в цель для каждого из них равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что:
а) в цель попадёт только один стрелок;
б) в цель попадут только два стрелка;
в) в цель попадёт хотя бы один стрелок.

Решение. Рассмотрим следующие события:
A_1 – первый стрелок попал в цель;
A_2 – второй стрелок попал в цель;
A_3 – третий стрелок попал в цель;
$\overline{A}_1$ – первый стрелок не попал в цель;
$\overline{A}_2$ – второй стрелок не попал в цель;
$\overline{A}_3$ – третий стрелок не попал в цель.

Известны вероятности событий A_1, A_2, A_3:

$$P(A_1) = 0,7;\ P(A_2) = 0,8;\ P(A_3) = 0,9.$$

Следовательно, для противоположных им событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ имеем:

$$P(\overline{A}_1) = 1 - 0,7 = 0,3;\ P(\overline{A}_2) = 1 - 0,8 = 0,2;\ P(\overline{A}_3) = 1 - 0,9 = 0,1.$$

а) Пусть событие B – в цель попадёт только один стрелок. Тогда имеем

$$B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3.$$

В силу несовместности событий-слагаемых и независимости событий-сомножителей, согласно теоремам 1 и 3 § 9, найдём вероятность события B:

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3) +$$
$$+P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) = 0,7\cdot 0,2\cdot 0,1 + 0,3\cdot 0,8\cdot 0,1 +$$
$$+0,3\cdot 0,2\cdot 0,9 = 0,092.$$

б) Пусть событие C – в цель попадут только два стрелка. Тогда

$$C = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3.$$

В силу несовместности событий-слагаемых и независимости событий-сомножителей, согласно теоремам 1 и 3 § 9, найдём вероятность события C:

$$P(C) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3) + P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) +$$
$$+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = 0,7\cdot 0,8\cdot 0,1 + 0,7\cdot 0,2\cdot 0,9 +$$
$$+0,3\cdot 0,8\cdot 0,9 = 0,398.$$

в) Пусть событие D – в цель попадёт хотя бы один стрелок. Тогда противоположное ему событие $\overline{D}$ – в цель не попадёт ни один стрелок:

$$\overline{D} = \overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3.$$

Согласно следствию 3 теоремы 1 § 9 для противоположных событий имеем

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}),$$

где в силу независимости событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ по теореме 3 § 9 вероятность события $\overline{D}$ равна

$$P(\overline{D}) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) = 0,3\cdot 0,2\cdot 0,1 = 0,006.$$

Следовательно, получим

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0,006 = 0,994.$$

Ответ: а) 0,092; б) 0,398; в) 0,994.

Задача 8

Решение. (см. пример § 11, п. 3).

Задача 9

Решение. (см. пример § 12, п. 4).

Вопросы зачёта

1. Понятие информации.
2. Классификация информации.
3. Свойства информации. Обработка информации.
4. Понятие языка. Структура математического языка.
5. Математика и естествознание.
6. Понятие модели и моделирования.
7. Примеры математических моделей.
8. Понятие множества.
9. Операции над множествами, их свойства.
10. Численность множества.
11. Числовые множества.
12. Множество комплексных чисел: основные понятия.
13. Формы записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
14. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Решение квадратных уравнений.
15. Основные понятия математической логики. Логические операции над высказываниями.
16. Формулы алгебры высказываний. Законы алгебры высказываний.
17. Нормальные формы для формул алгебры высказываний.
18. Приложение алгебры высказываний к логико-математической практике.
19. Правила суммы и произведения в комбинаторике. Бином Ньютона.
20. Размещения, перестановки, сочетания без повторений.
21. Размещения, перестановки, сочетания с повторениями.
22. События и их классификация.
23. Абсолютная частота и относительная частота события.
24. Классическое определение вероятности события. Свойства.
25. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
26. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
27. Формула Бернулли.
28. Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины.
29. Закон распределения дискретной случайной величины.
30. Функция распределения случайной величины.

31. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.

32. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины.

33. Плотность распределения непрерывной случайной величины.

34. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

35. Основные законы распределения непрерывных случайных величин.

36. Генеральная и выборочная совокупности.

37. Статистическое распределение выборки.

38. Полигон и гистограмма выборки.

39. Числовые характеристики вариационного ряда.

Примерные задачи зачёта

1. Даны числовые множества $A = (-10;7]$, $B = [2;17)$. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C_R A$, $C_R B$.

2. Даны множества $A = \{2;7;8;10\}$, $B = \{0;1;2;6;8;9\}$. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

3. На самостоятельной работе по дисциплине «Основы математической обработки информации» были предложены три задачи: по множествам, логике и комбинаторике. Задачу по множествам решили 20, по логике – 21, по комбинаторике – 21 студент. При этом задачи по множествам и логике решили 12 студентов, по множествам и комбинаторике – 15, по логике и комбинаторике – 14. Все три задачи решили 9 студентов. Сколько студентов решили хотя бы одну задачу?

4. Докажите, что для любых множеств A, B, C справедливо равенство $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

5. Записать в тригонометрической и показательной формах комплексное число $z = -3 - 3i$.

6. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел $z_1 = 3 + 2i$ и $z_2 = 7 - 3i$.

7. Решить квадратное уравнение $2x^2 - 2x + 1 = 0$.

8. Составить таблицу истинности для формулы $(A \vee B) \to ((B \wedge C) \leftrightarrow A)$.

9. Проверить, является ли тавтологией следующая формула: $(A \to B) \wedge (B \leftrightarrow C) \to (A \vee C)$.

10. При помощи законов алгебры высказываний найти СКНФ и СДНФ для формулы $(A \wedge C) \leftrightarrow ((B \vee C) \to A)$.

11. Сколько различных «слов» из трёх букв можно составить из букв слова ЭКЗАМЕН?

12. Сколькими способами можно выбрать 3 различные ручки из 10 видов, имеющихся в магазине?

13. Сколько можно составить пятизначных телефонных номеров из цифр 1, 3, 5, 7, 9 так, чтобы в каждом отдельно взятом номере все цифры были различны?

14. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность следующих событий: а) сумма выпавших очков равна 8; б) сумма выпавших очков не менее 5.

15. Игральный кубик бросают три раза. Найти вероятность того, что на верхней грани кубика выпадет три раза число очков, не меньшее 3.

16. Два стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка попадут в цель; б) хотя бы один стрелок попадёт в цель.

17. На зачёте предлагается 30 задач, из них 10 – по множествам, 8 – по математической логике, остальные – по теории вероятностей. Для сдачи зачёта студент должен решить первую попавшуюся наугад задачу. Какова вероятность для студента сдать зачёт, если он умеет решать 8 задач по множествам, 6 – по математической логике и 10 – по теории вероятностей?

18. Проверка заданий ЕГЭ группы *C* осуществляется доктором наук и аспирантом. Вероятность того, что работу проверит доктор наук, равна 0,73. Вероятность того, что правильно решённая задача будет положительно оценена доктором наук, равна 0,83, аспирантом – 0,78. Правильно решённая задача была положительно оценена. Какова вероятность того, что данная работа была проверена доктором наук?

19. Монету бросают 4 раза. Найти вероятность того, что: а) решка выпадет менее двух раз; б) решка выпадет не менее двух раз.

20. В партии имеется 10 костюмов, из них 4 имеют скрытый дефект. Покупают 2 костюма. Найти закон распределения случайной величины X – числа дефектных костюмов среди купленных.

21. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	2	4	7
p	0,1	0,3	0,6

22. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \;\; x \le 0, \\ x/3 & \textit{при} \;\; 0 < x \le 3, \\ 1 & \textit{при} \;\; x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$ и вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;1)$.

23. Плотность распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \;\; x \le 0, \\ 3x^2 & \textit{при} \;\; 0 < x \le 1, \\ 0 & \textit{при} \;\; x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

24. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X, заданной плотностью распределения $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \;\; x \le 0, \\ (x+1)/4 & \textit{при} \;\; 0 < x \le 2, \\ 0 & \textit{при} \;\; x > 2. \end{cases}$$

25. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 2 и 3. Записать плотность распределения $f(x)$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу: а) $(0;6)$, б) $(-\infty;2)$.

26. Найти числовые характеристики выборки, заданной статистическим распределением частот:

x_i	4	8	10
n_i	2	7	8

Построить полигон частот.

27. Измерили вес (с точностью до кг) 30 наудачу отобранных студентов:

98, 60, 54, 83, 55, 53, 67, 86, 63, 55,
57, 75, 70, 96, 59, 73, 82, 67, 71, 69,
79, 65, 56, 79, 58, 71, 75, 73, 64, 92.

Построить интервальный статистический ряд и гистограмму частот полученной выборки.

Тест

1. Для множества $A=\{1;3;7;18\}$ **не**верной является запись …

A) $1\subset A$, B) $\{3;18\}\subset A$, C) $3\in A$.

2. Даны множества $A=\{-1;3;7\}$, $B=\{0;5;8\}$, $C=\{-1;0;3;5;7;8\}$. Тогда множество C равно …

A) $A\cap C$, B) $B\cap C$, C) $A\cup B$.

3. Пусть $M=[-2;+\infty)$, $N=(0;10]$. Тогда разность множеств $M\setminus N$ равна …

A) $\varnothing$, B) $[-2;0]\cup(10;+\infty)$, C) $[-2;0)\cup[10;+\infty)$.

4. В классе 28 учащихся. Из них 20 человек сдавали ЕГЭ по физике, 15 – по обществознанию, 13 – и по физике, и по обществознанию. Сколько учащихся не сдавали ЕГЭ ни по физике, ни по обществознанию?

A) 6, B) 22, C) 7.

5. Число 0 является …

A) натуральным, B) действительным, C) иррациональным.

6. Комплексное число $\dfrac{4+2i}{3-i}$ равно …

A) 3, B) $1+i$, C) $1{,}4+0{,}2i$.

7. Из перечисленных предложений высказыванием является …
A) «Кто дежурный?»,
B) «Москва – столица России»,
C) «У меня есть кошка».

8. Высказывание «Все лягушки зелёные $\wedge$ π – иррациональное число» равносильно …
A) «Все лягушки зелёные **и** π – иррациональное число»,
B) «Все лягушки зелёные **или** π – иррациональное число»,
C) «**Если** все лягушки зелёные, **то** π – иррациональное число».

9. Формула $(A \vee B) \to \overline{A}$ является …
A) тавтологией,
B) противоречием,
C) ни тавтологией, ни противоречием.

10. Число способов, с помощью которых можно выбрать рубашку и галстук из гардероба, если имеется 8 рубашек и 6 галстуков, равно …
A) 14, B) 48, C) 8!·6!

11. Сколько трёхбуквенных «слов» можно составить из букв слова ВОЛГА?
A) 10, B) 60, C) 5.

12. Монету подбросили 20 раз. Относительная частота выпадения решки составила 0,2. Сколько раз выпала решка?
A) 2, B) 10, C) 4.

13. Игральный кубик бросают один раз. Вероятность того, что на верхней грани выпадет число очков, больше чем четыре, равна ...
A) $2/3$, B) $1/6$, C) $1/3$.

14. Из колоды в 36 карт вынимают по 1 карте, не возвращая их обратно. Тогда вероятность того, что извлекут валета при третьем испытании, если при первом испытании была вынута семёрка, при втором испытании был вынут валет, равна …

A) $4/35$, B) $3/34$, C) $4/36$.

15. По оценкам экспертов вероятности банкротства для двух предприятий, производящих разнотипную продукцию, равны 0,2 и 0,35. Тогда вероятность банкротства обоих предприятий равна ...

A) 0,55, B) 0,07, C) 0,37.

16. Для вычисления математического ожидания дискретной случайной величины используется формула …

A) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$,

B) $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i}$,

C) $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i$.

17. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	4	10
p	0,2	0,7	0,1

Тогда её математическое ожидание равно …

A) 0,56, B) 9, C) 4.

18. Известно, что для случайной величины X $M(X) = 4$, $M(X^2) = 20$. Тогда её дисперсия равна …

A) 4, B) 2, C) 16.

19. Стоимость различных блокнотов в магазине составила 20, 10, 25, 100, 35, 45. Тогда объём данной выборки равен …

A) 235, B) 604, C) 6.

20. Статистическим распределением частот выборки 2; 1; 1; 3; 2; 2; 3 будет …

A)

x_i	2	3	2
n_i	1	2	3

B)

x_i	1	2	3
n_i	2	3	2

C)

x_i	1	2	3
n_i	2	1	4

21. Дано статистическое распределение частот выборки

x_i	–1	2	5	12
n_i	4	5	2	1

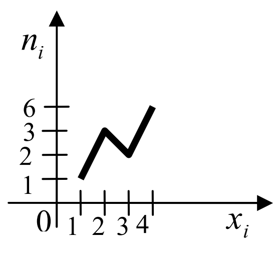
Тогда её объём равен …
A) 13,	B) 12,	C) 4.

22. Дано статистическое распределение частот выборки

x_i	2	8	30
n_i	1	5	4

Тогда значение относительной частоты для $x = 8$ равно …
A) 0,5,	B) 0,2,	C) 0,8.

23. Дан полигон частот выборки



Тогда объём данной выборки равен …
A) 36,	B) 12,	C) 6.

24. Дано статистическое распределение частот выборки

x_i	1	2	4	6
n_i	4	5	10	1

Тогда выборочная средняя $\overline{x}_в$ выборки равна …

А) 3, В) 20, С) 60.

25. Медиана выборки 4; –2; 0; –1; 4; 4; 4; 5; 0; 2 равна …

А) 4, В) 2, С) 3.

26. Дана выборка 9; 8; 8; 0; 2; 1; 8. Тогда её мода равна …

А) 0, В) 8, С) 9.

Приложения.

Приложение 1. *Таблица производных*

1. $(c)' = 0$, $c = const$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
5. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
6. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
7. $\left(e^x\right)' = e^x$
8. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
9. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$
10. $(\sin x)' = \cos x$
11. $(\cos x)' = -\sin x$
12. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
13. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
14. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
17. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования

1) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $c = const$;
2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Приложение 2. *Таблица основных интегралов*

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

10. $\int \dfrac{xdx}{x^2 + a} = \dfrac{1}{2}\ln|x^2 + a| + C$

11. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

14. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

16. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

При вычислении определённого интеграла применяют *формулу Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Приложение 3. *Таблица значений функции Лапласа*

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	**0,40**	0,1554	**0,80**	0,2881	**1,20**	0,3849	**1,60**	0,4452
0,01	0,0040	**0,41**	0,1591	**0,81**	0,2910	**1,21**	0,3869	**1,61**	0,4463
0,02	0,0080	**0,42**	0,1628	**0,82**	0,2939	**1,22**	0,3883	**1,62**	0,4474
0,03	0,0120	**0,43**	0,1664	**0,83**	0,2967	**1,23**	0,3907	**1,63**	0,4484
0,04	0,0160	**0,44**	0,1700	**0,84**	0,2995	**1,24**	0,3925	**1,64**	0,4495
0,05	0,0199	**0,45**	0,1736	**0,85**	0,3023	**1,25**	0,3944	**1,65**	0,4505
0,06	0,0239	**0,46**	0,1772	**0,86**	0,3051	**1,26**	0,3962	**1,66**	0,4515
0,07	0,0279	**0,47**	0,1808	**0,87**	0,3078	**1,27**	0,3980	**1,67**	0,4525
0,08	0,0319	**0,48**	0,1844	**0,88**	0,3106	**1,28**	0,3997	**1,68**	0,4535
0,09	0,0359	**0,49**	0,1879	**0,89**	0,3133	**1,29**	0,4015	**1,69**	0,4545
0,10	0,0398	**0,50**	0,1915	**0,90**	0,3159	**1,30**	0,4032	**1,70**	0,4554
0,11	0,0438	**0,51**	0,1950	**0,91**	0,3186	**1,31**	0,4049	**1,71**	0,4564
0,12	0,0478	**0,52**	0,1985	**0,92**	0,3212	**1,32**	0,4066	**1,72**	0,4573
0,13	0,0517	**0,53**	0,2019	**0,93**	0,3238	**1,33**	0,4082	**1,73**	0,4582
0,14	0,0557	**0,54**	0,2054	**0,94**	0,3264	**1,34**	0,4099	**1,74**	0,4591
0,15	0,0596	**0,55**	0,2088	**0,95**	0,3289	**1,35**	0,4115	**1,75**	0,4599
0,16	0,0636	**0,56**	0,2123	**0,96**	0,3315	**1,36**	0,4131	**1,76**	0,4608
0,17	0,0675	**0,57**	0,2157	**0,97**	0,3340	**1,37**	0,4147	**1,77**	0,4616
0,18	0,0714	**0,58**	0,2190	**0,98**	0,3365	**1,38**	0,4162	**1,78**	0,4625
0,19	0,0753	**0,59**	0,2224	**0,99**	0,3389	**1,39**	0,4177	**1,79**	0,4633
0,20	0,0793	**0,60**	0,2257	**1,00**	0,3413	**1,40**	0,4192	**1,80**	0,4641
0,21	0,0832	**0,61**	0,2291	**1,01**	0,3438	**1,41**	0,4207	**1,81**	0,4649
0,22	0,0871	**0,62**	0,2324	**1,02**	0,3461	**1,42**	0,4222	**1,82**	0,4656
0,23	0,0910	**0,63**	0,2357	**1,03**	0,3485	**1,43**	0,4236	**1,83**	0,4664
0,24	0,0948	**0,64**	0,2389	**1,04**	0,3508	**1,44**	0,4251	**1,84**	0,4671
0,25	0,0987	**0,65**	0,2422	**1,05**	0,3531	**1,45**	0,4265	**1,85**	0,4678
0,26	0,1026	**0,66**	0,2454	**1,06**	0,3554	**1,46**	0,4279	**1,86**	0,4686
0,27	0,1064	**0,67**	0,2486	**1,07**	0,3577	**1,47**	0,4292	**1,87**	0,4693
0,28	0,1103	**0,68**	0,2517	**1,08**	0,3599	**1,48**	0,4306	**1,88**	0,4699
0,29	0,1141	**0,69**	0,2549	**1,09**	0,3621	**1,49**	0,4319	**1,89**	0,4706
0,30	0,1179	**0,70**	0,2580	**1,10**	0,3643	**1,50**	0,4332	**1,90**	0,4713
0,31	0,1217	**0,71**	0,2611	**1,11**	0,3665	**1,51**	0,4345	**1,91**	0,4719
0,32	0,1255	**0,72**	0,2642	**1,12**	0,3686	**1,52**	0,4357	**1,92**	0,4726
0,33	0,1293	**0,73**	0,2673	**1,13**	0,3708	**1,53**	0,4370	**1,93**	0,4732
0,34	0,1331	**0,74**	0,2703	**1,14**	0,3729	**1,54**	0,4382	**1,94**	0,4738
0,35	0,1368	**0,75**	0,2734	**1,15**	0,3749	**1,55**	0,4394	**1,95**	0,4744
0,36	0,1406	**0,76**	0,2764	**1,16**	0,3770	**1,56**	0,4406	**1,96**	0,4750
0,37	0,1443	**0,77**	0,2794	**1,17**	0,3790	**1,57**	0,4418	**1,97**	0,4756
0,38	0,1480	**0,78**	0,2823	**1,18**	0,3810	**1,58**	0,4429	**1,98**	0,4761
0,39	0,1517	**0,79**	0,2852	**1,19**	0,3830	**1,59**	0,4441	**1,99**	0,4767

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,00	0,4772	**2,30**	0,4893	**2,60**	0,4953	**2,90**	0,4981
2,02	0,4783	**2,32**	0,4898	**2,62**	0,4956	**2,92**	0,4982
2,04	0,4793	**2,34**	0,4904	**2,64**	0,4959	**2,94**	0,4984
2,06	0,4803	**2,36**	0,4909	**2,66**	0,4961	**2,96**	0,4985
2,08	0,4812	**2,38**	0,4913	**2,68**	0,4963	**2,98**	0,4986
2,10	0,4821	**2,40**	0,4918	**2,70**	0,4965	**3,00**	0,49865
2,12	0,4830	**2,42**	0,4922	**2,72**	0,4967	**3,20**	0,49931
2,14	0,4838	**2,44**	0,4927	**2,74**	0,4969	**3,40**	0,49966
2,16	0,4846	**2,46**	0,4931	**2,76**	0,4971	**3,60**	0,499841
2,18	0,4854	**2,48**	0,4934	**2,78**	0,4973	**3,80**	0,499928
2,20	0,4861	**2,50**	0,4938	**2,80**	0,4974	**4,00**	0,499968
2,22	0,4868	**2,52**	0,4941	**2,82**	0,4976	**4,50**	0,499997
2,24	0,4875	**2,54**	0,4945	**2,84**	0,4977	**5,00**	0,499997
2,26	0,4881	**2,56**	0,4948	**2,86**	0,4979		
2,28	0,4887	**2,58**	0,4951	**2,88**	0,4980		

Библиографический список

1. *Абруков, Д. А.* Высшая математика для студентов педагогических вузов. Часть 1 : учебное пособие / Д. А. Абруков. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2008. – 103 с.

2. *Глотова, М. Ю.* Математическая обработка информации / М. Ю. Глотова, Е. А. Самохвалова. – М. : Издательство Юрайт, 2013. – 345 с.

3. *Глухова, Т. Н.* Задачник-практикум по математике для студентов гуманитарных специальностей : учебное пособие / Т. Н. Глухова. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2009. – 76 с.

4. *Гмурман, В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика : Учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2003. – 479 с.

5. *Гмурман, В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : Учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 8-е изд., доп. – М. : Высшая школа, 2003. – 404 с.

6. *Григорьева, Н. А.* Курс лекций по математическому анализу для студентов, обучающихся по направлению подготовки 262000 Технология изделий лёгкой промышленности / Н. А. Григорьева, А. М. Матвеева. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. – 82 с.

7. *Игошин, В. И.* Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов : Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В. И. Игошин. – М. : Издательский центр «Академия», 2005. – 304 с.

8. *Коробков, С. С.* Основы математической обработки информации / С. С. Коробков. – Екатеринбург : Уральский гос. пед. ун-т, 2012. – 98 с.

9. *Матвеев, С. В.* Теоретические основы информатики : курс лекций для студентов факультета естествознания и дизайна среды / С. В. Матвеев. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2012. – 62 с.

10. *Матвеева, А. Н.* Математика : курс лекций для студентов художественно-графического факультета / А. Н. Матвеева, Т. И. Рыбакова – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2012. – 63 с.

11. *Математическая энциклопедия* / под ред. И. М. Виноградова. – М. : Советская энциклопедия, 1977. – 1140 с.

12. *Орлов, В. Н.* Об одном варианте построения доверительного интервала прогнозируемого значения / В. Н. Орлов. – Вестник

РГСУ. № 1 (30). – Чебоксары, 2014. – с. 10–12.

13. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. – 3-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2008. – 288 с.

14. *Пономарева, Т. Т.* Теория вероятностей. Математическая статистика : Учебное пособие / Т. Т. Пономарева, Е. А. Деревянных. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2010. – 214 с.

15. *Фисунов, П. А.* Математика для гуманитарных специальностей педвузов : Учебное пособие / П. А. Фисунов, С. В. Шестипалова. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2000. – 128 с.

Оглавление

Учебное издание

Матвеева Анастасия Михайловна
Глухова Татьяна Николаевна
Абруков Денис Александрович

Основы математической обработки информации

Учебное пособие

Компьютерная верстка
Матвеевой А. М., Глуховой Т. Н., Абрукова Д. А.

Подписано в печать 25. 04. 2014. Формат 60x84/16.
Бумага писчая. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 8,8. Тираж 300 экз. Заказ №

Согласно Федеральному закону «О защите детей
от информации, причиняющей вред их здоровью и развитию»
от 29 декабря 2010 года № 436-ФЗ
данная продукция не подлежит маркировке

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в отделе полиграфии
ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38